Maliki Interdisciplinary Journal (MIJ) eISSN: 3024-8140
Volume 3, Issue June, 2025 pp. 715-723 http://urj.uin-malang.ac.id/index.php/mij/index

Pendekatan Epsilon-Delta terhadap konsep dan pembuktian limit dalam analisis real

Ahmad Maulana Firmansyah
Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail: ahmadmaulanafirman2@gmail.com

Kata Kunci:
Limit Fungsi, Epsilon-Delta, Analisis Real, Pembuktian Matematika, Kalkulus.

Keywords:
Limit Function, Epsilon-Delta, Real Analysis, Proof in Mathematical, Calculus.

A B S T R A K

Artikel ini bertujuan untuk menguraikan secara mendalam konsep limit fungsi melalui pendekatan epsilon-delta ($\epsilon - \delta$) serta menjembatani pemahaman intuitif dari kalkulus ke pembuktian formal dalam analisis real. Penulisan artikel ini menggunakan metode studi literatur dan analisis konseptual, dengan merujuk pada buku teks standar analisis real dan literatur matematika yang relevan. Tahapan pembahasan meliputi penyajian koneksi antara konsep intuitif dan definisi formal, analisis mendalam terhadap setiap komponen definisi $\epsilon - \delta$, dan diakhiri dengan demonstrasi kerangka kerja pembuktian yang sistematis. Artikel ini menunjukkan bahwa kesulitan yang sering dihadapi dalam pembuktian formal dapat diatasi melalui pemahaman logis dan proses dua tahap yaitu, analisis pendahuluan untuk menemukan nilai δ yang tepat dan pembuktian formal untuk validasi. Hasil dari pembahasan ini adalah sebuah panduan konseptual yang menegaskan bahwa penguasaan pendekatan $\epsilon - \delta$ merupakan kompetensi krusial untuk keberhasilan studi matematika tingkat lanjut, khususnya dalam analisis real.

A B S T R A C T

This article aims to elaborate on function limit through the epsilon-delta ($\epsilon - \delta$) approach and bridge the intuitive understanding from calculus to formal proof in real analysis. The writing of this article uses the method of literature study and conceptual analysis, by referring to standard textbooks of real analysis and relevant mathematical literature. The stages of discussion include presenting the connection between intuitive concepts and formal definitions, in-depth analysis of each component of the definition of $\epsilon - \delta$, and concluding with a demonstration of a systematic proof framework. The article shows that the difficulties often encountered in formal proofs can be overcome through logical understanding and a two-stage process: preliminary analysis to find the right value of δ and formal proof for validation. The result of this discussion is a conceptual guide that confirms that mastery of the $\epsilon - \delta$ approach is a crucial competence for the successful study of advanced mathematics, particularly in real analysis.

Pendahuluan

Konsep limit merupakan salah satu gagasan fundamental dalam kalkulus dan analisis matematika. Sejarah perkembangannya berjalan panjang, dimulai dari metode *exhaustion* yang digunakan oleh matematikawan Yunani kuno seperti Eudoxus dan Archimedes untuk menghitung luas dan volume, meskipun pada saat itu belum ada definisi limit yang formal (Boyer, 1949; Edwards, 1979). Gagasan intuitif mengenai proses tak hingga dan kedekatan mulai berkembang lebih lanjut pada abad ke-17 dengan karya-karya Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz, yang meletakkan dasar-dasar kalkulus diferensial dan integral. Namun, pendekatan mereka masih mengandalkan intuisi dan belum memiliki dasar logika yang kokoh.

Pada tingkat pengantar, seperti dalam kalkulus, konsep limit seringkali diperkenalkan secara intuitif. Limit fungsi $f(x)$ ketika x mendekati c dikatakan sebagai L jika nilai $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin dengan L dengan cara mengambil nilai x yang cukup dekat dengan c, tetapi $x = c$ (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007). Pemahaman intuitif ini, meskipun berguna untuk aplikasi praktis dan pemecahan masalah awal, belum cukup untuk membangun struktur matematika yang rigor.

Tantangan dalam membangun fondasi yang rigor ini tercermin langsung dalam pengalaman belajar mahasiswa. Mata kuliah Analisis Real adalah satu mata kuliah wajib yang dinilai sulit oleh sebagian besar mahasiswa (Abdussakir dkk., 2024). Salah satu faktor utama kesulitan tersebut adalah keharusan untuk beralih dari pemahaman yang sifatnya intuitif ke pembuktian yang sepenuhnya formal dan abstrak, yang menjadi inti dari analisis real.

Peralihan ini menjadi semakin sulit karena perbedaan budaya belajar antara pendidikan menengah dan perguruan tinggi. Sebuah penelitian menunjukkan bahwa banyak mahasiswa di tahun pertama mengalami kesulitan karena terbiasa dengan metode pengerjaan soal Ujian Nasional yang berorientasi pada hasil akhir dan penggunaan "rumus cepat". Akibatnya, mahasiswa seringkali tidak mampu memberikan uraian konseptual yang runtut ketika dihadapkan pada persoalan di tingkat universitas.

Kebutuhan akan definisi yang lebih presisi dan formal untuk mengatasi kesulitan konseptual tersebut menjadi mendesak pada abad ke-19, terutama untuk mengatasi paradoks dan kerancuan yang muncul dari penggunaan konsep tak hingga dan "kecil tak terhingga" secara longgar. Augustin-Louis Cauchy adalah salah satu tokoh kunci yang pertama kali berusaha memberikan definisi limit yang lebih ketat, diikuti oleh Karl Weierstrass yang kemudian menyempurnakannya menjadi definisi $\epsilon - \delta$ yang kita kenal sekarang (Grabiner, 1981; Kleiner, 2001). Definisi ini menggantikan bahasa kualitatif "mendekati" dengan pernyataan kuantitatif yang melibatkan bilangan real positif ϵ (epsilon) dan δ (delta). Pemahaman konsep-konsep dasar analisis real seperti nilai absolut, ketaksamaan, dan lingkungan (*neighborhood*) suatu titik menjadi prasyarat untuk memahami definisi formal limit ini secara mendalam (Bartle & Sherbert, 2011).

Pembahasan

Menjembatani Intuisi Kalkulus ke Definisi Formal Analisis Real

Pemahaman intuitif tentang limit yang diperoleh dari kalkulus, seperti yang dijelaskan oleh Purcell, Varberg, & Rigdon (2007), memberikan landasan awal yang penting. Intuisi menyatakan bahwa $\boldsymbol{f(x)}$ mendekati $\boldsymbol{L}$ ketika $\boldsymbol{x}$ mendekati $\boldsymbol{c}$. Namun, frasa "mendekati" tidak memiliki makna matematis yang cukup presisi untuk digunakan dalam pembuktian. Analisis real menuntut definisi yang mampu menangani semua kasus secara konsisten dan memungkinkan verifikasi klaim limit secara objektif. Definisi $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\delta})$

dari limit memenuhi kebutuhan ini dengan mengkuantifikasi sejauh mana "kedekatan" tersebut.

Definisi Formal Limit Fungsi Menggunakan Epsilon-Delta $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\delta})$

Definisi formal limit suatu fungsi adalah sebagai berikut: Misalkan fungsi $\boldsymbol{f}$ terdefinisi pada suatu interval terbuka yang memuat $\boldsymbol{c}$, kecuali mungkin di $\boldsymbol{c}$ itu sendiri. Kita katakan bahwa limit dari $\boldsymbol{f(x)}$ ketika $\boldsymbol{x}$ mendekati $\boldsymbol{c}$ adalah $\boldsymbol{L}$, ditulis $\lim_{x \to c} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{L}$, jika untuk setiap bilangan $\boldsymbol{\epsilon > 0}$, terdapat bilangan $\boldsymbol{\delta > 0}$ sedemikian sehingga jika $\boldsymbol{0 < |x - c| < \delta}$, maka $\boldsymbol{|f(x) - L| < \epsilon}$ (Bartle & Sherbert, 2011; Rudin, 1976). Berikut penjelasan definisi Epsilon-Delta:

Interpretasi Epsilon (ϵ)

Epsilon (ϵ) merepresentasikan suatu toleransi kesalahan atau jarak vertikal yang sangat kecil (namun positif) dari nilai limit L. Kita ingin selisih antara $f(x)$ dan L lebih kecil dari ϵ ini.

Interpretasi Delta (δ)

Delta (δ) merepresentasikan jarak horizontal yang sangat kecil (namun positif) dari titik c. Pemilihan δ bergantung pada ϵ yang diberikan. Artinya, untuk setiap tantangan ϵ yang diberikan (seberapapun kecilnya), kita harus dapat menemukan δ yang menjamin bahwa jika x berada dalam jarak δ dari c (dan $x \neq c$), maka $f(x)$ akan berada dalam jarak ϵ dari L.

Kondisi $0 < |x - c| < \delta$

Bagian $|x - c| < \delta$ berarti x berada dalam interval $(c - \delta, c + \delta)$. Bagian $0 < |x - c|$ (atau $x \neq c$) menekankan bahwa kita tidak tertarik pada nilai fungsi di $x = c$ itu sendiri, melainkan pada perilaku fungsi *mendekati* c.

Kondisi $|f(x) - L| < \epsilon$

Ini berarti $f(x)$ berada dalam interval $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Secara geometris, definisi ini dapat divisualisasikan sebagai sebuah "permainan $\epsilon - \delta$". Untuk setiap rentang horizontal $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ di sekitar L pada sumbu-y (seberapapun sempitnya rentang tersebut), kita harus dapat menemukan rentang vertikal $(c - \delta, c + \delta)$ di sekitar c pada sumbu-x sedemikian sehingga semua bagian dari grafik fungsi $y = f(x)$ untuk x dalam rentang vertikal ini (kecuali mungkin pada $x = c$) terletak di dalam rentang horizontal tersebut.

Langkah-Langkah Umum dalam Pembuktian Limit Menggunakan $\boldsymbol{\epsilon - \delta}$

Proses pembuktian limit menggunakan definisi (ϵ, δ) umumnya melibatkan dua tahap utama:

1. Analisis Pendahuluan (Pekerjaan Kasar/ *Scratch Work*): Tahap ini tidak termasuk dalam pembuktian formal tetapi sangat krusial.
    - Mulailah dengan ketaksamaan yang ingin dicapai: $|f(x) - L| < \epsilon$.

- Manipulasi bentuk $|f(x) - L|$ secara aljabar untuk memunculkan bentuk $|x - c|$.
- Dari manipulasi tersebut, tentukan bagaimana δ harus dipilih dalam kaitannya dengan ϵ agar ketaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ terpenuhi. Seringkali δ akan menjadi suatu fungsi dari ϵ, atau δ adalah nilai minimum dari beberapa ekspresi yang melibatkan ϵ.

2. Pembuktian Formal:

- Ambil sebarang $\epsilon > 0$. (Ini adalah langkah standar untuk memulai).
- Pilih $\delta =$ [ekspresi dalam ϵ yang ditemukan pada analisis pendahuluan]. Nyatakan dengan jelas pilihan δ ini. Jika ada batasan tambahan untuk δ (misalnya $\delta \leq 1$), nyatakan juga.
- Asumsikan $0 < |x - c| < \delta$.
- Dengan menggunakan pilihan δ dan asumsi $0 < |x - c| < \delta$, tunjukkan melalui langkah-langkah aljabar dan logis bahwa ketaksamaan $|f(x) - L| < \epsilon$ benar-benar terpenuhi.

Aplikasi dan Contoh Pembuktian Limit dengan $\boldsymbol{\epsilon - \delta}$

Pada bagian ini, akan disajikan penerapan definisi $\boldsymbol{\epsilon - \delta}$ untuk membuktikan pernyataan limit pada beberapa jenis fungsi: linear, kuadratik, dan rasional. Setiap contoh akan didahului oleh analisis pendahuluan untuk menemukan hubungan antara $\boldsymbol{\delta}$ dan $\boldsymbol{\epsilon}$, diikuti oleh pembuktian formal yang rigor.

1. Pembuktian Limit Fungsi Linear

Fungsi linear merupakan contoh paling dasar dan langsung untuk penerapan definisi $\epsilon - \delta$.

Soal: Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2}(3x + 1) = 7$.

Analisis Pendahuluan (Pekerjaan Kasar): Tujuan pembuktian adalah menunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, dapat ditemukan $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka $|(3x + 1) - 7| < \epsilon$.

1. Analisis dimulai dari kondisi akhir yang diinginkan: $|(3x + 1) - 7| < \epsilon$.
2. Ekspresi di dalam nilai absolut disederhanakan: $|3x - 6| < \epsilon$.
3. Faktor 3 dikeluarkan: $3|x - 2| < \epsilon$.
4. Dari sini, dapat dilihat hubungan yang dicari: $|x - 2| < 3\epsilon$.
5. Bentuk $|x - 2|$ ini cocok dengan bagian $|x - c|$ dari definisi limit (di mana $c = 2$). Hal ini memberikan petunjuk untuk memilih nilai δ. Maka, dapat dipilih $\delta = 3\epsilon$.

Pembuktian Formal:
Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$.
Ambil sebarang $\epsilon > 0$.
Pilih $\delta = 3\epsilon$. Karena $\epsilon > 0$, maka δ juga pasti positif.
Sekarang, asumsikan x adalah bilangan yang memenuhi $0 < |x-2| < \delta$.
Perhatikan bahwa:
$|(3x+1)-7| = |3x-6| = 3|x-2|$. Berdasarkan asumsi $|x-2| < \delta$, dan telah dipilih $\delta = 3\epsilon$, maka diperoleh:

$$3|x-2| < 3\delta = 3\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = \epsilon$$

Dengan demikian, telah ditunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ (yaitu $\delta = 3\epsilon$) sedemikian sehingga jika $0 < |x-2| < \delta$, maka $|(3x+1)-7| < \epsilon$. Berdasarkan definisi limit, terbukti bahwa $\lim_{x\to 2}(3x+1)(3x+1) = 7$. ■

2. Pembuktian Limit Fungsi Kuadratik

Pembuktian untuk fungsi non-linear seperti fungsi kuadratik sedikit lebih kompleks karena melibatkan faktor yang tidak konstan.

Soal: Buktikan bahwa $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Analisis Pendahuluan (Pekerjaan Kasar): Tujuan pembuktian: Jika $0 < |x-3| < \delta$, maka $|x^2-9| < \epsilon$.

1. Analisis dimulai dari $|x^2-9| < \epsilon$.
2. Ekspresi difaktorkan: $|(x-3)(x+3)| = |x-3||x+3| < \epsilon$.
3. Pada tahap ini, terdapat sebuah tantangan. Faktor $|x+3|$ tidak konstan, nilainya bergantung pada x. Nilai tersebut perlu dibatasi.
4. Idenya adalah hanya meninjau nilai x yang "dekat" dengan 3. Jaraknya dapat dibatasi dengan membuat asumsi awal untuk δ. Misalkan, dipastikan δ tidak lebih dari 1, yaitu $\delta \le 1$.
5. Jika $|x-3| < 1$, maka $-1 < x-3 < 1$. Menambahkan 6 pada semua sisi memberikan $5 < x+3 < 7$. Ini berarti nilai $|\ x+3\ |$ pasti kurang dari 7.
6. Dengan batasan ini, analisis dapat dilanjutkan dari langkah 3:

$$|x-3||x+3| <| \ x-3| \cdot 7.$$

7. Dikehendaki agar|$|\ x-3| \cdot 7 < \epsilon$, yang berarti $|x-3| < 7\epsilon$.
8. Dengan demikian, terdapat dua syarat untuk δ: $\delta \le 1$ dan $\delta \le 7\epsilon$. Untuk memenuhi keduanya, dipilih δ sebagai nilai yang lebih kecil dari keduanya, yaitu $\delta = min(1{,}7\epsilon)$.

Pembuktian Formal:
Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.
Ambil sebarang $\epsilon > 0$.
Pilih $\delta = min(1,7\epsilon)$. Pemilihan ini memastikan $\delta > 0$.
Sekarang, diasumsikan x adalah bilangan yang memenuhi $0 < |x - 3| < \delta$.
Karena $\delta \leq 1$, asumsi $|x - 3| < \delta$ juga berarti $|x - 3| < 1$. Dari ketaksamaan ini, diperoleh $-1 < x - 3 < 1$, yang mengimplikasikan $2 < x < 4$.
Akibatnya, $5 < x + 3 < 7$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $|x + 3| < 7$.
Selanjutnya, perhatikan ekspresi limit:

$$|x^2 - 9| = |(x - 3)(x + 3)| = |x - 3||x + 3|$$

Telah diketahui bahwa $|x + 3| < 7$ dan berdasarkan asumsi $|x - 3| < \delta$. Maka:

$$|x - 3||x + 3| < \delta \cdot 7$$

Karena juga telah dipilih $\delta \leq 7\epsilon$, maka $\delta \cdot 7 \leq (7\epsilon) \cdot 7 = \epsilon$.
Dengan menggabungkan ketaksamaan di atas, diperoleh:

$$|x^2 - 9| < \delta \cdot 7 \leq \epsilon$$

Dengan demikian, telah ditunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ (yaitu $\delta = min(1,7\epsilon)$) sedemikian sehingga jika $0 < |x - 3| < \delta$, maka $|x^2 - 9| < \epsilon$. Berdasarkan definisi limit, terbukti bahwa $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$. ■

3. Pembuktian Limit Fungsi Rasional

Metode untuk membatasi faktor non-konstan juga sangat berguna untuk fungsi rasional, di mana penyebutnya perlu dibatasi agar tidak terlalu dekat dengan nol.

Soal: Buktikan bahwa $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$.

Analisis Pendahuluan (Pekerjaan Kasar):

Tujuan pembuktian: Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$.

1. Analisis dimulai dari $\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$.
2. Ekspresi disederhanakan dengan menyamakan penyebut:

$$\left|\frac{2(x+1) - 1(x+3)}{2(x+3)}\right| = \left|\frac{2x + 2 - x - 3}{2(x+3)}\right| = \left|\frac{x - 1}{2(x+3)}\right| = \left|\frac{x - 1}{2(x+3)}\right| < \epsilon$$

3. Seperti sebelumnya, terdapat faktor yang bergantung pada x, yaitu $|2(x + 3)|$. Perlu dipastikan penyebut ini tidak terlalu kecil.
4. Nilai δ kembali dibatasi dengan asumsi awal, $\delta \leq 1$.
5. Jika $|x - 1| < 1$, maka $-1 < x - 1 < 1$, yang berarti $0 < x < 2$.
6. Akibatnya, untuk penyebut: $3 < x + 3 < 5$, sehingga $6 < 2(x + 3) < 10$.

7. Yang terpenting di sini adalah batas bawahnya: $|2(x+3)| > 6$. Ini berarti $\frac{1}{|2(x+3)|} < \frac{1}{6}$.
8. Kembali ke langkah 2: $\frac{|x-1|}{|2(x+3)|} < \frac{|x-1|}{6}$.
9. Dikehendaki agar $\frac{|x-1|}{6} < \epsilon$, yang berarti $|x-1| < 6\epsilon$.
10. Terdapat dua syarat: $\delta \leq 1$ dan $\delta \leq 6\epsilon$. Maka dipilih $\delta = min(1,6\epsilon)$.

Pembuktian Formal:

Akan dibuktikan bahwa $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$.

Ambil sebarang $\epsilon > 0$.

Pilih $\delta = min(1,6\epsilon)$. Ini memastikan $\delta > 0$.

Sekarang, asumsikan x adalah bilangan yang memenuhi $0 < |x-1| < \delta$.

Karena $\delta \leq 1$, maka $|x-1| < 1$, yang berarti $0 < x < 2$. Untuk penyebutnya, ini mengimplikasikan $3 < x+3 < 5$, sehingga $|2(x+3)| > 6$. Akibatnya, $\frac{1}{|2(x+3)|} < \frac{1}{6}$.

Selanjutnya, ekspresi limit dimanipulasi, perhatikan bahwa:

$$\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(x+1)-(x+3)}{2(x+3)}\right| = \frac{|x-1|}{|2(x+3)|}.$$

Dengan menggunakan hasil pembatasan penyebut dan asumsi $|x-1| < \delta$:

$$\frac{|x-1|}{|2(x+3)|} < \frac{|x-1|}{6} < \frac{\delta}{6}$$

Karena juga telah dipilih $\delta \leq 6\epsilon$, maka $\frac{\delta}{6} \leq \frac{6\epsilon}{6} = \epsilon$.

Dengan demikian, telah ditunjukkan:

$$\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Jadi, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x-1| < \delta$, maka $\left|\frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$. Berdasarkan definisi limit, terbukti bahwa $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$. ■

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Konsep limit merupakan pilar fundamental yang menopang struktur analisis real. Pendekatan epsilon-delta ($\epsilon - \delta$) hadir sebagai alat esensial yang memberikan dasar logika yang kokoh dan presisi matematis untuk konsep tersebut. Artikel ini telah menguraikan bagaimana pendekatan $\epsilon - \delta$ secara efektif menjembatani pemahaman limit yang bersifat intuitif sebagaimana yang sering diperkenalkan dalam kalkulus dengan tuntutan pembuktian formal yang rigor dalam analisis real.

Melalui pembahasan dan contoh-contoh yang disajikan, dapat disimpulkan bahwa proses pembuktian limit menggunakan definisi $\epsilon - \delta$ dapat disistematisasi menjadi dua tahap utama yaitu, analisis pendahuluan untuk menemukan hubungan antara δ dan ϵ, serta pembuktian formal untuk memvalidasi hubungan tersebut secara logis. Telah ditunjukkan pula bahwa metode ini bersifat *robust* dan dapat diaplikasikan pada berbagai jenis fungsi, mulai dari fungsi linear yang sederhana hingga fungsi kuadratik dan rasional yang memerlukan strategi pembatasan tambahan. Penguasaan definisi limit secara formal bukan hanya sebuah tujuan akhir, melainkan sebuah gerbang krusial untuk memahami konsep-konsep analisis yang lebih lanjut seperti kekontinuan, turunan, dan integral secara mendalam dan akurat.

Saran

Berdasarkan pembahasan dan kesimpulan yang telah diuraikan, berikut adalah beberapa saran yang dapat diajukan:

Bagi Mahasiswa dan Pembelajar

Disarankan untuk tidak hanya menghafal langkah-langkah pembuktian, tetapi fokus pada pemahaman logika di balik definisi $\epsilon - \delta$. Menggunakan visualisasi grafis untuk menginterpretasikan makna ϵ dan δ dapat sangat membantu dalam membangun intuisi yang benar. Latihan yang konsisten pada berbagai tipe fungsi akan mempertajam kemampuan analisis dan pembuktian.

Bagi Pengajar

Dalam proses pembelajaran, disarankan untuk secara eksplisit mendedikasikan waktu untuk menjelaskan transisi dari konsep limit yang intuitif ke definisi yang formal. Mendemonstrasikan tahap "analisis pendahuluan" atau *scratch work* secara terbuka di depan kelas dapat membantu mahasiswa memahami bagaimana cara "menemukan" δ yang tepat, sehingga proses pembuktian tidak terkesan seperti "trik sulap".

Untuk Penelitian Lanjutan

Penelitian di masa depan dapat diarahkan pada studi komparatif mengenai efektivitas berbagai pendekatan pedagogis dalam mengajarkan konsep $\epsilon - \delta$. Selain itu, analisis mengenai kesulitan-kesulitan spesifik mahasiswa Indonesia dalam memahami konsep ini dapat menjadi area penelitian yang menarik untuk menghasilkan modul pembelajaran yang lebih kontekstual dan efektif.

Daftar Pustaka

Dale Varberg. (2006). Dale Varberg, Edwin Purcell, Steve Rigdon - Calculus-Prentice Hall (2006). In *Calculus* (Vol. 9, pp. 1–797).

Dhombres, J. (1985). The origins of Cauchy's rigorous calculus. In *Historia Mathematica* (Vol. 12, Issue 1). https://doi.org/10.1016/0315-0860(85)90078-3

Faridah, S., Umie Ruhmana Sari, S., & Malik Ibrahim Malang, M. (n.d.). *Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang*.

Islahul Mukmin, M., & Masamah, U. (2024). Pengembangan Bahan Ajar Digital-Interaktif Analisis Real Berbasis Moderasi Beragama untuk Mahasiswa PTKIN di Indonesia. In *Academic Journal of Math* (Vol. 06, Issue 01). http://journal.iaincurup.ac.id/index.php/arithmetic/index

Nicolaescu, L. I. (2019). Introduction To Real Analysis. In *Introduction to Real Analysis*. https://doi.org/10.1142/11553

Nirwana, N., Susanti, E., & Susanto, D. (2021). Pengaruh Penerapan Somatis, Auditori, Visual, dan Intelektual Terhadap Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa. *Ideas: Jurnal Pendidikan, Sosial, Dan Budaya*, 7(4), 251. https://doi.org/10.32884/ideas.v7i4.451

Robert G. Bartle, D. R. S. (2011). *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition* (Fourth). John Wiley & Sons. http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=1a7ac55b016cc56c99944370b68f1e4a

Rudin, W. (n.d.). *[Walter_Rudin]_Principles_of_Mathematical_Analysis(BookFi).pdf*. McGraw-Hill Science Engineering Math.