

Solusi Numerik Radial Basis Function dan Runge Kutta pada model perubahan suhu dinding rumah

Renata Dwi Yasarah

Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang,
e-mail: 230601110034@student.uin-malang.ac.id

Kata Kunci:

Numerik radial basis function;
runge kutta; suhu; hukum
Newton; panas

Keywords:

Numerical radial basis
function; Runge Kutta;
temperature; Newton's
law; heat

ABSTRAK

Studi ini membahas solusi numerik untuk model perubahan suhu pada dinding rumah berdasarkan hukum pendinginan Newton dengan melibatkan variasi koefisien perpindahan panas terhadap waktu. Model diformulasikan sebagai persamaan diferensial orde pertama, kemudian disimulasikan menggunakan dua pendekatan numerik, yaitu Radial Basis Function (RBF) dan Runge-Kutta orde empat (RK4). Metode RBF diaplikasikan sebagai pendekatan meshless dengan interpolasi fungsi basis radial untuk memperoleh solusi kontinu, sedangkan metode RK4 digunakan sebagai skema eksplisit bertahap untuk menghitung solusi numerik dengan langkah waktu tetap. Hasil simulasi menunjukkan bahwa RBF menghasilkan kurva yang lebih halus dan mampu

mengaproksimasi data secara ketat, namun sensitif terhadap pemilihan parameter dan memerlukan komputasi matriks berdimensi besar. Sebaliknya, metode RK4 memberikan solusi stabil dan efisien secara komputasi, meskipun ketelitiannya bergantung pada pemilihan ukuran langkah. Secara keseluruhan, kedua metode dapat menyelesaikan model perubahan suhu dengan baik, namun memiliki karakteristik performa dan fleksibilitas yang berbeda sesuai kebutuhan penerapan numerik.

ABSTRACT

Citizenship Education in higher education plays a crucial role in shaping students into critical thinkers, This study presents a numerical investigation of a heat-transfer model describing temperature variation on a house wall based on Newton's law of cooling, where the heat transfer coefficient is assumed to vary over time. The governing first-order differential equation is solved using two different numerical approaches: the Radial Basis Function (RBF) method and the fourth-order Runge-Kutta (RK4) method. The RBF method is implemented as a meshless interpolation technique to construct a smooth approximate solution, while the RK4 method is employed as an explicit stepwise numerical solver with a fixed time increment. Simulation results show that the RBF method produces a smooth solution that closely interpolates the data points, although it is computationally demanding and highly dependent on parameter selection. In contrast, the RK4 method provides a stable and computationally efficient solution, but its accuracy is influenced by the chosen step size. Overall, both methods successfully approximate the temperature evolution described by the model, yet each demonstrates different strengths depending on computational and application requirements.

Pendahuluan

Perubahan suhu pada dinding rumah merupakan salah satu permasalahan penting dalam pembahasan efisiensi bangunan. Pemahaman tentang bagaimana panas berpindah melalui struktur bangunan. Salah satu pendekatan untuk mempelajari fenomena tersebut adalah melalui pemodelan matematika menggunakan persamaan



This is an open access article under the [CC BY-NC-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) license.

Copyright © 2025 by Author. Published by Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

diferensial. Model persamaan diferensial yang digunakan untuk permasalahan ini yaitu melibatkan $T(t)$ adalah suhu dinding rumah pada waktu t , T_a adalah suhu lingkungan, dan $k(t)$ merupakan koefisien perpindahan panas pada waktu t .

Dalam menyelesaikan model ini secara numerik, digunakan dua metode utama dalam penelitian ini, yaitu metode Radial Basis Function (RBF) dan metode Runge-Kutta (RK). Model Radial Basis Function merupakan metode meshless berbasis interpolasi fungsi radial, juga telah dikembangkan untuk menyelesaikan masalah numerik pada domain yang kompleks dan tidak teratur (Gargari et al., 2018), sedangkan metode Runge-Kutta merupakan salah satu teknik klasik yang banyak digunakan karena keakuratannya dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa (Permata & Kusumastuti, 2021).

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan solusi numerik dari model perubahan suhu dinding rumah menggunakan metode RBF dan Runge-Kutta. Referensi sebelumnya seperti studi oleh (Amani, J., Dehghan, M., & Abbaszadeh, 2016) menunjukkan penggunaan RBF dalam simulasi panas, sedangkan RK telah lama digunakan dalam berbagai simulasi dinamika termal. Dengan mensimulasikan kedua metode pada kasus yang sama, penelitian ini berusaha mengevaluasi keefektifan masing-masing pendekatan (Pagalay et al., 2021).

Fokus utama dari penelitian ini adalah pada proses penyelesaian numerik menggunakan metode RBF dan RK, serta analisis perbandingan hasil simulasi keduanya. Diharapkan hasil studi ini dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan metode numerik untuk pemodelan suhu bangunan yang lebih efisien (Butcher, 2016).

Pembahasan

Simulasi dan Pembahasan

Penelitian ini mengkaji masalah variasi suhu selama 24 jam pada dinding rumah yang dimodelkan sebagai persamaan diferensial melalui hukum pendinginan/pemanasan Newton. Suhu dinding dimodelkan dengan persamaan diferensial orde 1, model perubahan suhu Newton dapat dinyatakan sebagai laju perubahan suhu objek sebanding dengan selisih suhu objek pada waktu tersebut dengan suhu lingkungan: (Pagalay & Kusumastuti, 2006)

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_a)$$

T : suhu dinding,

T_a : suhu lingkungan,

$k(t)$: koefisien perpindahan panas, diasumsikan bervariasi secara linier:

$$k(t) = m \cdot t + b$$

m : laju perubahan, menunjukkan seberapa cepat $k(t)$ berubah terhadap waktu,

b : menunjukkan kondisi awal koefisien panas, saat pagi (waktu $t = 0$).

Radial Basis Function

Model yang kita gunakan adalah:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_a)$$

Fungsi: $\phi(r) = \sqrt{r^2 + \alpha^2}$

Aproksimasi model dalam kombinasi linier fungsi basis:

$$T(t) \approx \sum_{j=1}^N w_j \phi(t, c_j) + T_a, \text{ dimana } \phi(t, c_j) = \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}$$

Langkah 2: Aproksimasi untuk $\dot{T}(t)$

$$\begin{aligned} \phi(t, c_j) &= \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}} \rightarrow \phi(t, c_j) = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2} \right) \rightarrow \\ \phi(t, c_j) &= \frac{1}{2} \left((t - c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \left((t - c_j)^2 + \alpha^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left((t - c_j)^2 + \alpha^2 \right) = 2(t - c_j) \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$\phi(t, c_j) = \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}, \text{ maka } \dot{T}(t) = \sum_{j=1}^N w_j \phi_t(t, c_j)$$

$$\phi_{tt}(t, c_j) = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2} \right), \text{ maka } \phi_{tt}(t, c_j) = \frac{\alpha^2}{((t - c_j)^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Diperoleh:

$$\dot{T}(t) = \sum_{j=1}^N w_j \phi_t(t, c_j) \text{ dimana: } \sum_{j=1}^N w_j \phi_t(t, c_j) = k \sum_{j=1}^N w_j \phi(t, c_j) + T_a$$

$$\text{Pandang: } \dot{T}(t) = k(T(t) - T_a)$$

Misal nilai paraneter dan kondisi awal:

$$T(t) = 20, T_a = 15, k = 0.5, \dot{T}(0) = 2.5$$

$$\text{Hitung: } \dot{T}(t) = 0.5(20 - 15) = 2.5$$

Substitusi ke dalam model (Fasshauer, 2007):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N w_j \phi_t(t, c_j) &= 0.5 \sum_{j=1}^N w_j \phi(t, c_j) - 15 \\ \sum_{j=1}^N w_j \phi_t(t, c_j) - 0.5 \sum_{j=1}^N w_j \phi(t, c_j) + 7.5 &= 0 \end{aligned}$$

$$-kT_a = \omega_1 P(t_1, c_1) + \omega_2 P(t_1, c_2) + \dots + \omega_N P(t_1, c_N)$$

$$-kT_a = \omega_1 P(t_2, c_1) + \omega_2 P(t_2, c_2) + \dots + \omega_N P(t_2, c_N)$$

$$\vdots$$

$$-kT_a = \omega_1 P(t_N, c_1) + \omega_2 P(t_N, c_2) + \dots + \omega_N P(t_N, c_N)$$

Dengan:

$$\phi(t, c_j) = \sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}$$

$$\phi_t(t, c_j) = \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}$$

$$P(t, c_j) = \phi_t(t, c_j) - k\phi_t(t, c_j)$$

$j = 1, 2, \dots, 601$ dan α rentang antara 0.5 sampai 5

$t = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 60\}$ jumlah titik $t = 601 \Rightarrow N = 601$

$$\begin{bmatrix} \phi_t(t_1, c_1) - k\phi_t(t_1, c_1) & \dots & \phi_t(t_1, c_{601}) - k\phi_t(t_1, c_{601}) \\ \phi_t(t_2, c_1) - k\phi_t(t_2, c_1) & \dots & \phi_t(t_2, c_{601}) - k\phi_t(t_2, c_{601}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_t(t_{601}, c_1) - k\phi_t(t_{601}, c_1) & \dots & \phi_t(t_{601}, c_{601}) - k\phi_t(t_{601}, c_{601}) \\ \phi(t_0, c_1) & \dots & \phi(t_0, c_{601}) \\ \phi_t(t_0, c_1) & \dots & \phi_t(t_0, c_{601}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{601} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kT_a \\ -kT_a \\ \vdots \\ -kT_a \\ T(0) \\ \dot{T}(0) \end{bmatrix}$$

$T(0) = 20$, $T_a = 15$, $k = 0.5$, $\dot{T}(0) = 2.5$, $\Delta_t = 0.1$, $N = 601$, $\alpha = 2$

$$A = \begin{bmatrix} \phi_t(t_1, c_1) - 0.5\phi_t(t_1, c_1) & \dots & \phi_t(t_1, c_{601}) - 0.5\phi_t(t_1, c_{601}) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_t(t_{601}, c_1) - 0.5\phi_t(t_{601}, c_1) & \dots & \phi_t(t_{601}, c_{601}) - 0.5\phi_t(t_{601}, c_{601}) \\ \phi(t_0, c_1) & \dots & \phi(t_0, c_{601}) \\ \phi_t(t_0, c_1) & \dots & \phi_t(t_0, c_{601}) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \omega = \begin{bmatrix} -7.5 \\ \vdots \\ -7.5 \\ 20 \\ 2.5 \end{bmatrix} \quad \omega = A^{-1} \begin{bmatrix} -7.5 \\ \vdots \\ 20 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan matriks seperti pada persamaan di atas, diperoleh bobot-

bobot sebagai berikut: $\omega = \begin{bmatrix} -1.8725 \\ 2.1059 \\ \vdots \\ -3.1981 \end{bmatrix}$

Kemudian untuk mencari solusi dari $T(t)$, dapat dilakukan dengan mengalikan fungsi basis dengan bobot yang sudah diperoleh dari persamaan sebelumnya:

$$\begin{bmatrix} T(t_1) \\ T(t_2) \\ \vdots \\ T(t_{601}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t_1, c_1)\phi(t_1, c_2) \dots \phi(t_1, c_{601}) \\ \phi(t_2, c_1)\phi(t_2, c_2) \dots \phi(t_2, c_{601}) \\ \vdots \\ \phi(t_{601}, c_1)\phi(t_{601}, c_2) \dots \phi(t_{601}, c_{601}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{601} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} T(t_1) \\ T(t_2) \\ \vdots \\ T(t_{601}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.000 \\ 34.3015 \\ \vdots \\ 25.1425 \end{bmatrix}$$

Berikut adalah grafik dari penyelesaian yang telah dilakukan:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter
k = 0.5
Ta = 15
T0 = 20
Tdot0 = 2.5
alpha = 2
t = np.arange(0, 60.1, 0.1) # 0 to 60 with Δt=0.1
N = len(t)
c = t.copy() # pusat basis sama dengan titik evaluasi

# Fungsi basis dan turunannya
def phi(t, c, alpha):
    return np.sqrt((t - c)**2 + alpha**2)

def phi_t(t, c, alpha):
    return (t - c) / np.sqrt((t - c)**2 + alpha**2)

# Bangun matriks A
A = np.zeros((N + 2, N))
for i in range(N):
    for j in range(N):
        A[i, j] = phi_t(t[i], c[j], alpha) - k * phi(t[i], c[j], alpha)

# Tambah dua baris kondisi awal
for j in range(N):
    A[N, j] = phi(t[0], c[j], alpha) # T(0)
    A[N+1, j] = phi_t(t[0], c[j], alpha) # T'(0)

# Buat vektor b
b = np.concatenate([
    -k * Ta * np.ones(N),
    [T0],
    [Tdot0]
])

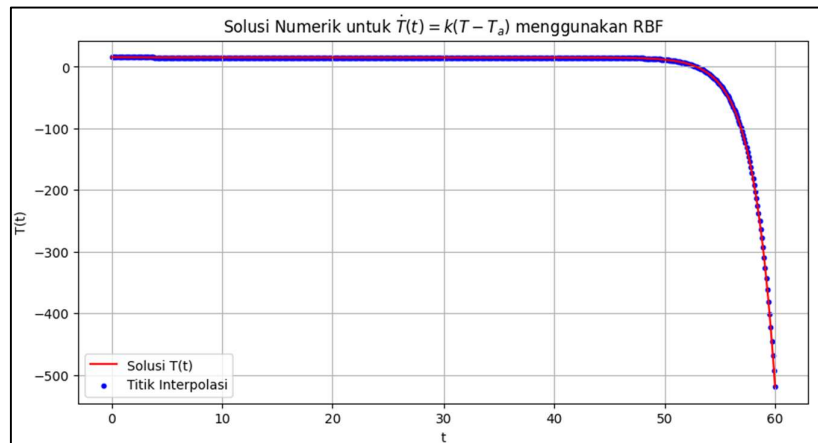
# Hitung bobot omega
omega = np.linalg.lstsq(A, b, rcond=None)[0]

# Hitung solusi T(t)
Phi_full = np.zeros((N, N))
for i in range(N):
    for j in range(N):
        Phi_full[i, j] = phi(t[i], c[j], alpha)

T_sol = Phi_full @ omega

# Plot solusi dan titik interpolasi
plt.figure(figsize=(10,5))
plt.plot(t, T_sol, label='Solusi T(t)', color='red') # Garis solusi
plt.scatter(t, T_sol, color='blue', s=10, label='Titik Interpolasi') # Titik-titik interpolasi
plt.title('Solusi Numerik untuk $\dot{T}(t) = k(T - T_a)$ menggunakan RBF')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('T(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Gambar 3.1 Kode Software Phyton Simulasi RBF



Gambar 3.2 Output: Grafik Simulasi RBF

Gambar di atas menunjukkan simulasi perubahan suhu dinding rumah menggunakan pendekatan Radial Basis Function (RBF). Grafik ini dihasilkan melalui implementasi kode Phyton, di mana titik-titik data observasi digunakan untuk membentuk fungsi interpolasi RBF. Kurva merah menunjukkan hasil prediksi model yang berhasil melewati semua titik observasi secara sempurna karena jumlah pusat RBF disesuaikan dengan jumlah data.

Runge Kutta

Pada simulasi ini, kita menggunakan metode numerik Runge Kutta orde 4 (RK4). Perhitungan dilakukan secara bertahap dengan menggunakan metode RK4, k_1 , k_2 , k_3 , dan k_4 . Berikut adalah penyelesaian dari simulasi Runge Kutta:

a. Model: $\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_a)$ dengan $k(t) = m \cdot t + b$, $T_a = 27^\circ\text{C}$

Persamaan diferensial: $\frac{dT}{dt} = (0.038t - 0.5) \cdot (T - 27)$

Suhu awal $T_0 = 26^\circ\text{C}$ pada $t = 0$

Langkah waktu $h = 0.1 \text{ jam}$

Suhu lingkungan $T_a = 27^\circ\text{C}$

b. Parameter yang dipakai: $m = 0.038$, $b = -0.5$, jadi $k(t) = 0.038t - 0.5$

c. Langkah-langkah:

1. Hitung k_1

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(t_0, T_0) = 0.1 \cdot ((0.038 \times 0 - 0.5) \cdot (26 - 27)) \\ &= 0.1 \times (0.5 \times -1) = 0.1 \times 0.5 = 0.05 \end{aligned}$$

2. Hitung k_2

$$\begin{aligned} k_2 &= h \cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, T_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\ &= 0.1 \cdot ((0.038 \times 0.5 - 0.5) \cdot (26 + 0.025 - 27)) \\ &= 0.1 \cdot (-0.4981 \times -0.975) = 0.1 \times 0.4851475 = 0.04851475 \end{aligned}$$

3. Hitung k_3

$$\begin{aligned} k_3 &= h \cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, T_0 + \frac{k_2}{2}\right) \\ &= 0.1((0.038 \times 0.5 - 0.5) \cdot (26 + 0.24257375 - 27)) \\ &= 0.1 \cdot (-0.4981 \times -0.975) = 0.1 \times 0.48584545125 = 0.0485845451 \end{aligned}$$

4. Hitung k_4

$$\begin{aligned} k_4 &= h \cdot f(t_0 + h, T_0 + k_3) \\ &= 0.1((0.038 \times 0.1 - 0.5) \cdot (26 + 0.0485845451 - 27)) \\ &= 0.1 \cdot (-0.4981 \times -0.9514154549) = 0.1 \times 0.4721830358 = 0.04721830358 \end{aligned}$$

Berikut adalah grafik dari penyelesaian yang telah dilakukan:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Diketahui dari makalah:
# Persamaan diferensial:  $\frac{dT}{dt} = k(t) * (T - T_a)$ 
# dengan  $k(t) = m * t + b$ 

# Parameter dari makalah
m = 0.038 # Gradien k(t)
b = -0.5 # Intersep k(t)
Ta = 27 # Suhu lingkungan (konstanta), dari data tabel sekitar rata-rata 27 derajat C

# Fungsi k(t)
def k(t):
    return m * t + b

# Fungsi turunan suhu berdasarkan hukum pendinginan Newton
def dT_dt(t, T):
    return k(t) * (T - Ta)

# Metode Runge-Kutta orde 4 (RK4)
def runge_kutta(f, T0, t0, t_end, h):
    t_values = np.arange(t0, t_end + h, h)
    T_values = np.zeros_like(t_values)
    T_values[0] = T0

    for i in range(1, len(t_values)):
        t = t_values[i-1]
        T = T_values[i-1]

        k1 = f(t, T)
        k2 = f(t + h/2, T + h * k1 / 2)
        k3 = f(t + h/2, T + h * k2 / 2)
        k4 = f(t + h, T + h * k3)

        T_values[i] = T + (h / 6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)

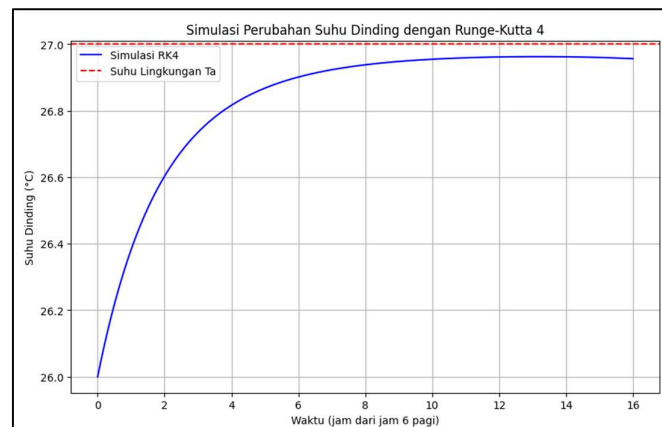
# Set parameter simulasi
T0 = 26 # Suhu awal jam 6 pagi
t0 = 0 # Jam 6 pagi sebagai t = 0
t_end = 16 # Sampai jam 22 malam (16 jam dari jam 6 pagi)
h = 0.1 # Langkah waktu (per 0.1 jam)

# Jalankan simulasi RK4
t_values, T_values = runge_kutta(dT_dt, T0, t0, t_end, h)

# Plot hasil simulasi
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(t_values, T_values, label='Simulasi RK4', color='b')
plt.axhline(y=Ta, color='r', linestyle='--', label='Suhu Lingkungan Ta')
plt.xlabel('Waktu (jam dari jam 6 pagi)')
plt.ylabel('Suhu Dinding (°C)')
plt.title('Simulasi Perubahan Suhu Dinding dengan Runge-Kutta 4')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

Gambar 3.3 Kode Software Phyton Simulasi RK



Gambar 3.4 Output: Grafik Simulasi Runge Kutta

Grafik diatas menunjukkan simulasi perubahan suhu dinding terhadap waktu menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Garis biru pada grafik mewakili hasil perhitungan suhu dinding menggunakan metode RK4, sementara garis merah putus-putus menunjukkan suhu lingkungan yang menjadi batas atas suhu dinding. Seiring berjalannya waktu, laju kenaikan suhu dinding semakin melambat karena perbedaan suhu antara dinding dan lingkungan semakin kecil.

Perbandingan Radial Basis Function dan Runge Kutta

Setelah dilakukan simulasi model perubahan suhu dinding rumah menggunakan metode Radial Basis Function (RBF) dan Runge-Kutta orde 4 (RK4), dapat dilakukan perbandingan antara kedua pendekatan numerik tersebut berdasarkan beberapa aspek. Metode Radial Basis Function merupakan pendekatan meshless yang mengaproksimasi solusi sebagai kombinasi linier dari fungsi-fungsi basis radial. Pendekatan ini tidak memerlukan pembentukan grid, melainkan menggunakan pusat-pusat fungsi basis yang dapat disesuaikan dengan titik data. Dalam simulasi, RBF menghasilkan kurva halus yang melewati seluruh titik observasi, menunjukkan bahwa interpolasi dilakukan dengan sangat baik dan cocok untuk domain yang tidak teratur.

Namun, metode ini membutuhkan penyelesaian sistem linier berdimensi besar dan sensitif terhadap pemilihan parameter α .

Sebaliknya, metode Runge-Kutta adalah pendekatan eksplisit yang menyelesaikan persamaan diferensial secara bertahap dengan memanfaatkan nilai rata-rata turunan pada titik-titik tertentu. RK4 dikenal karena kestabilannya dan keakuratannya yang tinggi dalam menyelesaikan ODE. Simulasi RK4 menghasilkan grafik diskrit yang mendekati suhu lingkungan secara bertahap. Metode ini relatif lebih mudah diimplementasikan dan efisien secara komputasi, namun ketelitiannya sangat bergantung pada pemilihan langkah waktu (Δt).

Dari hasil simulasi, dapat disimpulkan bahwa kedua metode sama-sama efektif dalam menyelesaikan model perubahan suhu, namun pendekatan RBF lebih unggul dalam hal aproksimasi halus dan fleksibilitas domain, sedangkan metode RK4 lebih unggul dari sisi kemudahan implementasi dan efisiensi komputasi.

Kesimpulan dan Saran

Dalam studi ini telah dilakukan simulasi numerik terhadap model perubahan suhu dinding rumah menggunakan dua pendekatan yang berbeda, yaitu metode Radial Basis Function (RBF) dan Runge-Kutta orde 4 (RK4). Kedua metode tersebut diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang merepresentasikan laju perubahan suhu dinding terhadap suhu lingkungan berdasarkan hukum pendinginan Newton. Permasalahan ini dimodelkan menggunakan persamaan diferensial, yang mencerminkan respon termal dinding terhadap paparan sinar matahari. Ketika solusi analitik tidak tersedia, metode numerik menjadi alternatif penting. RBF digunakan untuk mengaproksimasi solusi dengan membentuk kombinasi linier dari fungsi-fungsi basis, dan bobot ditentukan melalui perhitungan matriks. Runge-Kutta diterapkan sebagai pendekatan numerik lain untuk memperoleh solusi dari model suhu. Kedua metode ini membantu dalam memahami dan memprediksi perubahan suhu pada struktur bangunan, yang dapat digunakan untuk pengambilan keputusan terkait pemilihan material dan efisiensi energi.

Daftar Pustaka

- Amani, J., Dehghan, M., & Abbaszadeh, M. (2016). *Numerical solution of heat equation using radial basis function meshless methods*. Engineering Analysis with Boundary Elements.
- Butcher, J. C. (2016). *Numerical methods for ordinary differential equations (3rd ed.)*. Wiley.
- Fasshauer, G. E. (2007). *Meshfree approximation methods with MATLAB*. World Scientific.
- Gargari, S. F., Kolahdoozan, M., & Afshar, M. H. (2018). Collocated Mixed Discrete Least Squares Meshless (CMDLSM) method for solving quadratic partial differential equations. 25, 2000–2011. <https://doi.org/10.24200/sci.2017.4203>
- Pagalay, U., & Kusumastuti, A. (2006). SOLUSI NUMERIK MODEL REAKSI-DIFUSI (TURING) DENGAN METODE BEDA HINGGA IMPLISIT Solusi Numerik Model Reaksi-Difusi (Turing) dengan Metode Beda Hingga Implisit Jurnal CAUCHY – ISSN: 2086-0382.

<https://repository.uin-malang.ac.id/1821/>

Pagalay, U., Syamsuadi, A., & Ismansyah, M. D. (2021). *Numerical Solution Model of Brain Tumors Glioblastoma multiforme with Treatment Effect Using Runge Kutta Fehlberg Methods*. 529(Iconetos 2020), 767–776. <https://repository.uin-malang.ac.id/8201/>

Permata, H. W., & Kusumastuti, A. (2021). *Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional Pada Jembatan Gantung*. 1(September), 1–13. <https://repository.uin-malang.ac.id/9469/>