Maliki Interdisciplinary Journal (MIJ) eISSN: 3024-8140
Volume 4, Issue November, 2026 pp. 1611-1617 http://urj.uin-malang.ac.id/index.php/mij/index

Bilangan ramsey untuk graf bintang dan graf siklus

Miftahul Hidayah
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail: 230601110001@student.uin-malang.ac.id

Kata Kunci:
Bilangan Ramsey, Graf Bintang, Graf Siklus, Teori Graf, Kombinatorika

Keywords:
Ramsey Number, Star Graph, Cycle Graph, Graph Theory, Combinatorics

A B S T R A K

Teori Ramsey merupakan cabang kombinatorika yang mengkaji keberadaan struktur tertentu dalam pewarnaan graf lengkap. Artikel ini membahas bilangan Ramsey untuk pasangan graf bintang $K_{1,m}$ dan graf siklus C_n. Tujuan kajian ini adalah menyajikan landasan teori, sifat dasar, serta hasil utama mengenai nilai eksak $R(K_{1,m}, C_n)$ berdasarkan literatura yang ada. Metode yang digunakan adalah studi literatura dengan meninjau hasil-hasil utama dari Parsons dan Lawrence serta beberapa pengembangan terbaru. Hasil kajian menunjukkan bahwa nilai bilangan Ramsey untuk pasangan tersebut bergantung pada paritas siklus serta hubungan antara parameter n dan $2m$, dengan tiga bentuk utama formula yang mencakup kasus siklus ganjil kecil, siklus genap kecil, dan siklus panjang. Selain itu, dibahas pula teknik pembuktian yang umum digunakan, yaitu konstruksi graf kritis, análisis derajat, serta penerapan teorema Dirac dan Turan. Kajian ini juga menyoroti berbagai generalisasi bilangan Ramsey, termasuk kasus multipartit, roda, multiwarna, dan siklus genap panjang.

A B S T R A C T

Ramsey theory is a branch of combinatorics that studies the existence of specific structures within edge colored complete graphs. This paper examines Ramsey numbers for the pair consisting of a star graph $K_{1,m}$ and cycle graph C_n. The aim of this study is to present the theoretical foundations, basic properties, and main results concerning the exact value of $R(K_{1,m}, C_n)$ based on existing literature. The method used is a literature review focusing on the results of Parsons and Lawrence as well as recent developments. The results show that the Ramsey number for this pair depends on the parity of the cycle and the relationship between n and $2m$, yielding three main cases covering small odd cycles, small even cycles, and long cycles. In addition, common proof techniques are discussed, including critical graph constructions, degree analysis, and applications of Dirac's and Turán's theorems. This study also highlights several generalizations of Ramsey numbers, such as multipartite, wheel graphs, multicolor versions, and long even cycles.

Pendahuluan

Teori Ramsey merupakan cabang kombinatorik yang mengkaji kondisi minimum agar suatu struktur tertentu pasti muncul di dalam setiap pewarnaan sebuah objek yang cukup besar (Radziszowski, 2021). Gagasan ini berasal dari teorema yang dibuktikan oleh Frank P. Ramsey pada tahun 1930, yang menyatakan bahwa untuk setiap dua bilangan bulat positif s dan t, terdapat bilangan bulat N sedemikian sehingga setiap graf dengan N titik memuat klik berorde s atau himpunan mandiri berorde t (Ramsey, 1930). Dalam teori graf, konsep tersebut dirumuskan sebagai bilangan Ramsey untuk dua graf yaitu $R(G, H)$, yang didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil n sehingga setiap pewarnaan dua warna pada sisi-sisi graf lengkap K_n selalu memuat salinan graf G berwarna merah atau salinan H berwarna biru (Radziszowski, 2021).

This is an open access article under the CC BY-NC-SA license.
Copyright © 2023 by Author. Published by Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penentuan nilai eksak $R(G,H)$ untuk berbagai pasangan graf dikenal sebagai permasalahan yang sulit. Sebagai contoh, nilai $R(K_5,K_5)$, hingga saat ini belum diketahui secara pasti dan hanya diketahui berada pada rentang $43 \leq R(K_5,K_5) \leq 48$ (Radziszowski, 2021). Namun, untuk pasangan graf yang melibatkan graf bintang $K_{1,m}$ dan graf siklus C_n, nilai bilangan Ramsey dapat ditentukan secara eksak untuk semua nilai parameter m dan n (Parsons, 1975; Lawrence, 1983). Penelitian mengenai bilangan Ramsey yang melibatkan graf bintang juga telah banyak dikaji di Indonesia. Artikel ini menyajikan landasan teori bilangan Ramsey untuk pasangan graf $K_{1,m}$ dan C_n secara sistematis, meliputi definisi dan sifat dasar bilangan Ramsey, karakteristik struktural graf bintang dan graf siklus, teorema nilai eksak beserta teknik pembuktiannya, sifat monoton, serta beberapa generalisasi yang telah dikaji dalam literatur.

Pembahasan

Definisi dan Sifat Dasar Bilangan Ramsey

Misalkan G dan H adalah dua graf sederhana. Bilangan Ramsey $R(G,H)$ didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap 2-pewarnaan sisi graf lengkap K_n dengan warna merah dan biru, selalu terdapat subgraf berwarna merah yang isomorfik dengan G atau terdapat subgraf berwarna biru yang isomorfik dengan H. Dalam notasi panah, kondisi ini ditulis $Kn \rightarrow (G,H)$, sehingga $R(G,H) = min\{n : Kn \rightarrow (G,H)\}$ (Radziszowski, 2021). Keberadaan $R(G,H)$ untuk setiap pasangan graf G dan H tanpa titik terisolasi dijamin oleh Teorema Ramsey (Ramsey, 1930).Bilangan Ramsey klasik $r(s,t) = R(K_s,K_t)$ merupakan kasus khusus dari definisi di atas dengan $G = K_s$ dan $H = K_t$. Beberapa sifat dasar bilangan Ramsey Adalah bahwa bilangan tersebut simetris, yaitu $R(G,H) = R(H,G)$, kemudian memiliki batas bawah berupa $R(G,H) \geq max\{|V(G)|,|V(H)|\}$, serta bersifat monoton terhadapat subgraf, yakni jika G' Adalah subgraf dari G, maka berlaku $R(G',H) \leq R(G,H)$. Sifat monoton tersebut sangat berguna dalam penentuan batas bawah. Jika G' merupakan subgraf dari G dan nilai $R(G',H)$ telah diketahui, maka nilai tersebut dapat digunakan sebagai batas bawah bagi $R(G,H)$ (Radziszowski, 2021).

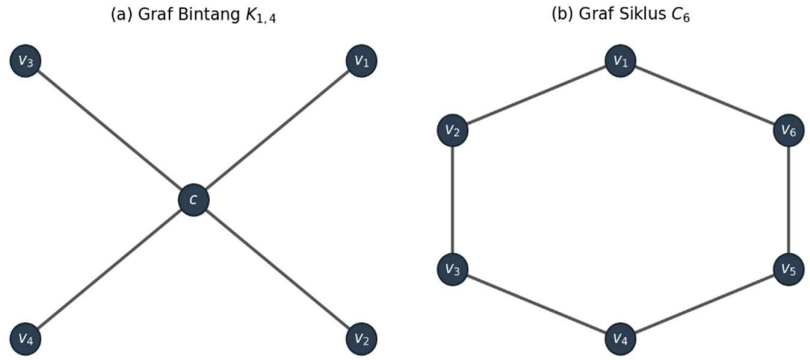
Graf Bintang dan Graf Siklus

Graf bintang $K_{1,m}$ adalah graf bipartit lengkap dengan himpunan titik $V = \{c, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ dan himpunan sisi $E = \{\{c, v_i\} : i = 1, \ldots, m\}$. Titik c disebut titik pusat *(center)* dan $v_1, v_2, \ldots, v_m$ disebut daun *(leaves)*. Graf ini memiliki orde $m + 1$, ukuran m, derajat maksimum $\Delta(K_{1,m}) = m$, dan derajat minimum $\delta(K_{1,m}) = 1$ (Abdussakir, 2009). $K_{1,m}$ merupakan pohon, dalam beberapa referensi $K_{1,m}$ dinotasikan pula sebagai S_m (Chartrand et al., 2016). Graf bintang juga muncul secara alami dalam konstruksi graf yang berasal dari struktur aljabar, seperti graf konjugasi dari grup dihedral $D2n$, di mana kajian terhadap spektrum signless-Laplace dan spektrum detour graf tersebut telah dilakukan dan menghasilkan formula eksak bergantung pada paritas n (Abdussakir & Khasanah, 2018).

Graf bintang $S_n = K_{1,n}$ juga banyak dikaji dalam konteks pelabelan graf. Salah satu hasil yang diperoleh adalah penentuan nilai ketakteraturan total dari beberapa salinan graf bintang, yaitu $ts(4S_n) = 2n + 1$ untuk $n \geq 3$. Pembuktian hasil tersebut

menggunakan batas bawah yang diperoleh dari kondisi bobot titik serta batas atas melalui konstruksi pelabelan eksplisit (Marzuki et al., 2021).

Graf siklus C_n, untuk $n \geq 3$, adalah graf 2-reguler dengan himpunan titik $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(C_n) = \{\{v_i, v_{i+1}\}: i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{v_n, v_1\}\}$. Graf ini memiliki orde n dan ukuran n. Sifat penting C_n dalam konteks bilangan Ramsey adalah paritasnya. Graf C_n bersifat bipartit jika dan hanya jika n genap, sehingga bilangan kromatiknya adalah $\chi(C_n) = 2$ untuk n genap dan $\chi(Cn) = 3$ untuk n ganjil (Chartrand et al., 2016). Perbedaan ini berpengaruh langsung terhadap bentuk hasil dan formula bilangan Ramsey pada masing-masing kasus.



Gambar 1. (a) Graf Bintang $K_{1,4}$ dengan titik pusat c dan empat daun. (b) Graf Siklus C_6 yang bersifat bipartit karena n genap.

Properti struktural yang menghubungkan graf bintang dengan derajat maksimum adalah bahwa suatu graf G memuat $K_{1,m}$ sebagai subgraf jika dan hanya jika $\Delta(G) \geq m$. Dengan demikian, ketiadaan $K_{1,m}$ pada subgraf merah dalam suatu 2 pewarnaan setara dengan syarat bahwa derajat merah setiap titik paling banyak $m - 1$. Properti ini menjadi dasar teknik analisis derajat dalam pembuktian batas atas bilangan Ramsey untuk pasangan graf bintang-siklus (Parsons, 1975). Dua teorema struktural yang digunakan dalam analisis subgraf biru adalah Teorema Dirac dan Teorema Turan. Teorema Dirac menyatakan bahwa graf G pada $n \geq 3$ titik dengan $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ memuat siklus Hamilton. Sementara itu, Teorema Turan menyatakan bahwa graf pada n titik yang bebas subgraf K_{r+1} memiliki paling banyak $\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$ sisi, untuk kasus bebas segitiga C_3, batasnya adalah $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ (Chartrand et al., 2016). Kedua teorema ini digunakan untuk menjamin keberadaan C_n dalam subgraf biru ketika subgraf merah tidak memuat $K_{1,m}$ (Parsons, 1975; Lawrence, 1983).

Teorema Bilangan Ramsey $R(K_{1,m}, C_n)$

Nilai eksak $R(K_{1,m}, C_n)$ untuk semua $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ ditentukan oleh Parsons untuk kasus n ganjil dan dilengkapi oleh Lawrence untuk kasus n genap. Hasil keduanya dirangkum sebagai berikut (Parsons, 1975; Lawrence, 1983):

Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$,

$$R(K_{1,m}, C_n) \begin{cases} 2m+1, \text{jika } n \text{ ganjil dan } 3 \leq n \leq 2m-1 \\ m+1, \text{jika } n \geq 2m \\ n, \text{jika } n \text{ genap dan } n < 2m \end{cases} \quad (1)$$

Ketiga kasus pada formula (1) bergantung pada paritas n serta hubungan antara n dan $2m$. Kasus pertama berlaku untuk siklus ganjil yang Panjang hingga $2m - 1$, kasus kedua berlaku ketika siklus cukup Panjang yaitu $n \geq 2m$, sedangkan kasus ketiga berlaku untuk siklus genap dengan Panjang kurang dari $2m$ (Parsons, 1975; Lawrence, 1983).

Teknik Pembuktian dalam Teori Ramsey Graf

Pembuktian nilai eksak bilangan Ramsey umumnya terdiri dari dua bagian yang saling melengkapi. Bagian pertama adalah pembuktian batas bawah, yaitu dengan mengkonstruksi suatu 2-pewarnaan sisi K_{n-1} yang tidak memuat G berwarna merah maupun H berwarna biru. Graf yang dilengkapi pewarnaan demikian disebut graf kritis Ramsey *(Ramsey graph)*, dan konstruksinya menunjukkan bahwa $R(G,H) > n-1$ (Radziszowski, 2021). Bagian kedua adalah pembuktian batas atas, yaitu menunjukkan bahwa setiap 2 pewarnaan K_n pasti terdapat G merah atau H biru, sehingga diperoleh $R(G,H) \leq n$ (Radziszowski, 2021). Nilai eksak diperoleh ketika batas atas dan batas bawah bertemu pada nilai yang sama.

Untuk kasus pertama pada formula (1) (yakni n ganjil dengan $n \leq 2m-1$), konstruksi graf kritis dilakukan dengan menggunakan dua salinan K_m yang saling lepas. Sisi dalam masing-masing K_m diwarnai merah, sedangkan sisi antar komponen diwarnai biru. Dalam pewarnaan ini, derajat merah maksimum setiap titik adalah $m-1$, sehingga tidak terbentuk $K_{1,m}$ merah. Di sisi lain subgraf biru membentuk $K_{m,m}$, karena n ganjil dan $n \leq 2m-1$, tidak memuat C_n (Parsons, 1975). Untuk kasus ketiga (yakni n genap dengan $n < 2m$), Lawrence menggunakan sifat bahwa C_n bersifat bipartit untuk mengkonstruksi pewarnaan kritis pada K_{n-1} melalui partisi titik menjadi dua himpunan dengan ukuran yang sesuai (Lawrence, 1983). Pembuktian batas atas pada ketiga kasus menggunakan analisis derajat. Jika suatu pewarnaan tidak memuat $K_{1,m}$ merah, maka derajat merah setiap titik paling banyak $m-1$ dan derajat biru paling sedikit $n-m$. Kondisi ini kemudian dikombinasikan dengan Teorema Turan untuk memperoleh kontradiksi apabila subgraf biru diasumsikan bebas C_n, serta dengan Teorema Dirac apabila derajat minimum biru melebihi $\delta \geq \frac{n}{2}$, yang menjamin keberadaan siklus Hamilton (Parsons, 1975; Lawrence, 1983).

Sifat Monoton Formula

Formula (1) menunjukkan beberapa pola bergantung pada parameter. Pada kasus pertama, nilai $R(K_{1,m}, C_n) = 2m + 1$ tidak bergantung pada n, sehingga seluruh siklus ganjil dalam rentang $3 \leq n \leq 2m - 1$ menghasilkan nilai bilangan Ramsey yang sama (Parsons, 1975). Pada kasus ketiga, $R(K_{1,m}, C_n) = n$ meningkat secara linier terhadap n dan tidak bergantung pada m. Peralihan antara kasus pertama dan kasus ketiga mencerminkan perubahan faktor pembatas utama antara ukuran graf bintang dan

panjang siklus (Lawrence, 1983).Untuk m tetap dan $n \to \infty$, kasus kedua berlaku ketika $n \geq 2m$, sehingga diperoleh $R(K_{1,m}, C_n) = m + 1$. Dengan demikian, nilai bilangan Ramsey tidak bertambah melebihi $m + 1$ untuk siklus dengan panjang $n \geq 2m$. Keterkaitan antara paritas n dan nilai bilangan Ramsey juga sejalan dengan sifat bipartit C_n genap, yang memengaruhi struktur subgraf biru yang dapat terbentuk dalam setiap 2-pewarnaan (Parsons, 1975; Lawrence, 1983).

Generalisasi Bilangan Ramsey Bintang-Siklus

Bilangan Ramsey untuk Gabungan Graf Bintang

Bilangan Ramsey multipartit himpunan *(set multipartite Ramsey number)* dikaji dengan menggantikan graf lengkap K_n dengan graf multipartit $K_{t \times j}$ sebagai objek yang diwarnai. Dalam kerangka ini, bilangan Ramsey untuk kombinasi graf tertentu, termasuk graf bintang dan graf kecil lain, bergantung pada parameter partisi j, dengan hasil yang berbeda dari bilangan Ramsey standar (Zain et al., 2021). Namun, untuk banyak kombinasi graf Bintang dan siklus, nilai eksaknya masih belum diketahui secara lengkap (Radziszowski, 2021).

Bilangan Ramsey untuk Graf Bintang terhadap Graf Roda

Graf roda $W_m = K_1 + C_m$ dibentuk dari satu titik pusat yang terhubung ke semua titik pada C_m (Chartrand et al., 2016). Nilai $R(K_{1,n}, W_m)$ telah ditentukan untuk beberapa kasus, termasuk $R(K_{1,n}, W_m) = 2n + 1$untuk n genap dengan $n > 4$. Teknik pembuktian yang digunakan serupa dengan kasus graf bintang dan siklus, yaitu melalui konstruksi graf kritis dan analisis derajat (Hasmawati et al., 2005).

Bilangan Ramsey Tiga Warna

Generalisasi bilangan Ramsey dari dua warna ke tiga warna dinotasikan $R(G_1, G_2, G_3)$, yaitu bilangan bulat positif terkecil n sehingga setiap 3-pewarnaan sisi K_n memuat salinan G_i dalam warna ke-i untuk setidaknya satu i. Untuk tiga graf bintang, diketahui bahwa $R(K_{1,m_1}, K_{1,m_2}, K_{1,m_3}) = m_1 + m_2 + m_3 - 1$ apabila tepat satu m_i genap, dan $R = m_1 + m_2 + m_3$ dalam kasus lainnya. Sementara itu, nilai eksak untuk kombinasi yang melibatkan siklus pada tiga warna, seperti $R(K_{1,m}, C_n, C_k)$, masih belum sepenuhnya diketahui dalam literatur (Radziszowski, 2021).

Bilangan Ramsey Siklus Genap Panjang

Menentukan nilai eksak $R(K_{1,n}, C_{2l})$ untuk $n = O(l^{10/9})$ dengan l besar, menggunakan pendekatan yang mengaitkan bilangan Ramsey dengan bilangan Turan $ex(N, C_{2l})$ (Allen et al., 2023). Bilangan Turan $ex(N, C_{2l})$ menyatakan jumlah sisi maksimum pada graf N titik yang bebas C_{2l} (Chartrand et al., 2016). Hasil ini mencakup rentang parameter yang tidak sepenuhnya dicakup oleh formula Lawrence-Parsons, khususnya untuk siklus genap yang sangat panjang (Allen et al., 2023).

Kesimpulan dan Saran

Beberapa generalisasi dari formula (1) telah dikaji dalam literatur, antara lain untuk pasangan graf Bintang dan graf roda (Hasmawati et al., 2005), variasi multipartit (Zain

et al., 2021), bilangan Ramsey tiga warna untuk bintang (Radziszowski, 2021), serta siklus genap panjang (Allen et al., 2023). Namun demikian, nilai bilangan Ramsey untuk beberapa kasus yang belum tercakup oleh formula Lawrence–Parsons, seperti pasangan graf bintang dan graf siklus pada kondisi tertentu serta kombinasi tiga warna yang melibatkan siklus, masih belum sepenuhnya ditentukan dalam literatur yang ada (Radziszowski, 2021). Sebagai saran, penelitian lanjutan dapat difokuskan pada pengembangan teknik batas atas dan batas bawah yang lebih tajam, khususnya dengan memanfaatkan pendekatan struktural pada graf berderajat terbatas, metode probabilistik, serta generalisasi hasil pada pewarnaan multiwarna. Selain itu, eksplorasi hubungan antara bilangan Ramsey dan parameter ekstremal graf, seperti bilangan Turan, juga berpotensi memberikan hasil baru pada kasus-kasus yang belum terselesaikan.

Daftar Pustaka

Abdussakir , A., & Khasanah, R. (2018). Spektrum signless-Laplace dan spektrum detour graf konjugasi dari grup dihedral. *Jurnal Kubik, III*(1), 45-51. doi:https://doi.org/10.15575/kubik.v3i1.2730. Retrieved from http://repository.uin-malang.ac.id

Abdussakir. (2009). *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi.* Malang: UIN Malang Press. Retrieved from http://repository.uin-malang.ac.id

Allen, P., Łuczak, T., Polcyn, J., & Zhang, Y. (2023). The Ramsey number of a long even cycle versus a star. *Journal of Combinatorial Theory, Series B, 162*, 144-153.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graphs and Digraphs (6th ed.).* CRC Press.

Hasmawati, Baskoro, E. T., & Assiyatun, H. (2005). Star-Wheel Ramsey Numbers. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 55*, 123-128.

Lawrence, S. L. (1983). Cycle-star Ramsey Numbers. *Notices of the American Mathematical Society, 20*(420).

Marzuki, C. C., Sari, Y., Abdussakir, A., & Aryani, F. (2021). Nilai ketakteraturan total dari empat copy graf bintang. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA), 4*(1), 17-28. doi:https://doi.org/10.14710/jfma.v4i1.8935. Retrieved from http://repository.uin-malang.ac.id

Parsons, T. D. (1975). Ramsey Graph and Block Designs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A, 20*(2), 187-196. doi:https://doi.org/10.1016/0097-3165(76)90074-1

Radziszowski, S. (2021). Small Ramsey Numbers. *Electronic Journal of Combinatorics, DS1*. doi:https://doi.org/10.37236/21

Ramsey, F. P. (1930). On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of the London Mathematical Society, s2-30*(1), 264-286. doi:https://doi.org/10.1112/plms/s2-30.1.264

Zain, A. S., Narwen, Effendi, & Syafrizal, S. (2021). Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan untuk Kombinasi Graf Lintasan Kecil dan Graf Bintang. *Jurnal Matematika Integratif, 17*(1), 1-4. doi:https://doi.org/10.24198/jmi.v17.n1.33077.1-4