Maliki Interdisciplinary Journal (MIJ)
Volume 1, Issue 3, 2023 pp. 175-202

eISSN: 3024-8140
http://urj.uin-malang.ac.id/index.php/mij/index

Spektrum dan energi *laplace* serta *signless-laplace* graf komutatif dari grup dihedral

Maria Syifaus Sa'adah
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail: 200601110089@student.uin-malang.ac.id

Kata Kunci:
spektrum laplace; energi laplace; spektrum signless laplace energi signless laplace; graf komutatif; grup dihedral

Keywords:
laplace spectrum; laplace energy; signless laplace spectrum; signless laplace energy; commutative graph; dihedral group

A B S T R A K

Grup dihedral merupakan kelompok simetri yang terdiri dari rotasi dan refleksi yang memiliki aplikasi luas dalam bidang geometri. Graf komutatif yang dibentuk oleh grup dihedral merupakan bentuk representasi hubungan komutatif antara elemen elemen apada grup dihedral. Penelitian ini akan mengkaji tentang sifat-sifat spektrum dan energi Laplace serta Signless Laplace dari graf komutatif. Spektrum graf merupakan himpunan nilai eigen dari operator yang terkait dengan graf, sedangkan energi merupakan hubungan kuadrat dari nilai eigen. Hasil dari penelitian ini adalah memahami struktur dari sifat-sifat spektrum dan energi dari graf komutatif yang muncul, sehingga dapat menjadi landasan untuk pengembangan metode baru dalam analisis graf dan pemodelan sistem yang melibatkan grup dihedral.

A B S T R A C T

The dihedral group is a symmetrical group consisting of rotations and reflections that have wide applications in geometry. The commutative graph formed by the dihedral group is a form of representation of the commutative relationship between the elements and the dihedral group. This research will examine the spectral properties and energies of Laplace and Signless Laplace from commutative graphs. The graph spectrum is the set of eigenvalues of the operators associated with the graph, while the energy is the quadratic relationship of the eigenvalues. The result of this research is to understand the structure of the spectrum and energy properties of the commutative graph that appears, so that it can become the basis for the development of new methods in graph analysis and system modeling involving dihedral groups.

Pendahuluan

Suatu graf (tak berarah) G merupakan pasangan yang terdiri dari 2 berhingga dan dapat didefiniskan sebagai $G = (V(G), E(G))$. $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari simpul atau verteks dari suatu graf. $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) dari sisi (*edge*) suatu graf di mana setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan sebuah pasangan tak berurutan dari simpul-simpul di (Taneo, 2019). Graf yang memiliki dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama dapat disebut dengan sisi ganda (*multi edges*). Sisi yang menghubungkan dengan dirinya sendiri disebut dengan gelang (*loop*), sedangkan graf yang memiliki gelang (*loop*) dapat disebut dengan graf semu (*pseudo graph*). Apabila suatu graf tidak memiliki loop dan tidak memiliki sisi ganda maka dapat disebut dengan graf sederhana (*simple graph*). Suatu graf yang memiliki sisi ganda maka dapat disebut dengan graf ganda (*multigraph*). Graf disebut dengan graf umum (*general graph*) yaitu graf yang memiliki gelang (*loop*) atau sisi ganda (*multigraph*). Dalam teori graf terdapat istilah insidensi dan derajat. Misalkan graf G yang didefinisikan dengan $G = (V, E)$, jika dua titik u dan v di G dihubungkan dengan sisi $e = uv$, maka u dan v disebut sebagai berdekatan (*adjancent*). Jika sisi $e = uv$, maka titik u dan sisi e (juga v dan e) disebut beririsan (*incident*). Orde (*order*) dari suatu graf G merupakan banyaknya titik dalam graf G. Selain orde, graf juga memilki ukuran (*size*). Ukuran (*size*) dari graf G adalah banyaknya sisi dalam graf G (Drs. Marsudi, 2016).

Graf tak berarah memiliki derajat (*degree*) suatu titik. Disebut dengan derajat apabila banyak sisi yang beririsan (*incident*) dengan titik tersebut. Derajat dari titik v dapat dinotasikan sebagai $d(v)$. Suatu graf G dapat disebut dengan graf teratur (*regular graph*) jika semua titik dari graf G mempunyai derajat (*degree*) yang sama. Ada beberapa istilah yang ada pada suatu graf G yaitu jalan (*walk*), lintasan (*path*), jalan tapak (*trail*), dan sirkuit (*circuit*). Istilah jalan pada graf G merupakan barisan titik-titik yang ada dalam graf G dimulai dari titik u dan berakhir di titik v sedemikian sehingga titik-titik yang berurutan adalah barisan yang berdekatan (*adjancent*) (Drs. Marsudi, 2016). Lintasan (*path*) dari graf G adalah lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n yang berupa barisan berselang seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n,$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G. Suatu lintasan dari graf G disebut dengan siklus (*cycle*) apabila lintasan berawal dan berakhri pada titik yang sama (Setyowidi et al., n.d.). Istilah yang terakhir adalah jalan tapak (*trail*) adalah jalan (*walk*) yang semua sisinya adalah berlainan sehingga dapat diketahui bahwa setiap lintasan (*path*) pasti suatu jalan tapak (*trail*), tetapi setiap jalan tapak (*trail*) belum tentu lintasan (*path*).

Saat ini, perkembangan teori graf sangat berkembang didukung dengan adanya salah satu cabang ilmu matematika, yaitu aljabar linier. Kedua cabang ilmu matematika ini dapat dihubungkan dengan merepresentasikan graf dalam bentuk suatu matriks, yaitu matriks *adjacency* (keterhubungan), dan matriks derajat (*degree*) (Setyowidi et al., n.d.). Misalkan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots., v_p\}$. Matriks *adjacency* (keterhubungan) dari graf G dapat dinotasikan sebagai $A(G) = [a_{ij}]$, dimana $A(G) = [a_{ij}]$ adalah matriks $p \times p$ dengan $a_{ij} = 1$ jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya. Matrik derajat dari graf G, dapat dinotasikan dengan $D(G)$ yang merupakan matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari $v_i, i = 1,2,3, \dots, p$. Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ disebut dengan matriks *Laplace* dan matriks dari $L^+(G) = D(G) + A(G)$ disebut dengan matriks *Signless Laplace* dari graf G (Abdussakir et al., 2017).

Matriks *adjacency* $A(G)$, matriks derajat $D(G)$, matriks *Laplace* $L(G)$, dan matriks *Sign Laplace* $L^+(G)$ dari graf G dapat dikaitkan dengan menggunakan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada cabang ilmu matematika sehingga menghasilkan konsep spektrum. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ adalah nilai eigen yang berbentuk matriks, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ merupakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i. Konsep spektrum dari graf apabila matriks yang berorde $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan

$m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua (Abdussakir et al., 2017). Spektrum yang diperoleh dari matriks $L(G)$ disebut dengan spektrum *Laplace* dan dapat dinotasikan sebagai $spec_L(G)$. Sedangkan matriks yang diperoleh dari matriks $L^+(G)$ disebut dengan spektrum *Signless Laplace* dan dapat dinotasikan sebagai $spec_{L^+}(G)$ (Khasanah, n.d.). Selain konsep spektrum ada juga konsep energi dari graf G. Konsep energi pada graf G adalah jumlah nilai mutlak dari nilai eigen sehingga dapat dinotasikan sebagai $E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(G)|$, dimana λ_i adalah nilai eigen dari matriks *adjacency* yang dapat dinotasikan menjadi $A(G)$ (G & Kanna, 2017).

Suatu graf G dapat dibangun dari suatu grup dihedral, misalnya graf komutatif dari grup dihedral. Misalkan G grup berhingga dan X adalah subsett dari G. Graf komutatif $C(G, X)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah X, dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy = yx$ di G grup.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka pada penelitian kali ini akan mengkaji tentang spektrum dan energi *Laplace* dan *Signless-Laplace* graf komutatif dari grup dihedral (D_{2n}).

Metode penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian kali ini adalah metode kepustakaan. Metode kepustakaan merupakan metode yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data pustaka seperti artikel, buku, catatan atau laporan penelitian terdahulu. Penentuan perumusan umum dari spektrum dan energi *Laplace* serta *Signless-Laplace* dengan mengkaji beberapa kasus pada grup dihedral. Graf komutatif dari grup dihedral yaitu $D_6, D_8, \dots, D_{26}$ dinyatakan ke dalam bentuk matriks, kemudian menentukan spektrum dan energi *Laplace* serta *Signless-Laplace,* dan dianalisis bentuk pola pada spektrum dan energi yang sudah diperoleh. Pola umum selanjutnya dinyatakan sebagai teorema.

Hasil dan pembahasan

Spektrum dan Energi *Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral (D_{2n})

1. **Spektrum dan Energi *Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_6**

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_6, maka diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil operasi komposisi grup dihedral D_6 yaitu:

$$r^\circ 1 = 1^\circ r$$
$$r^{2\circ} 1 = 1^\circ r^2$$
$$s^\circ 1 = 1^\circ s$$
$$sr^\circ 1 = 1^\circ sr$$
$$sr^{2\circ} 1 = 1^\circ sr^2$$
$$r^\circ r^2 = r^{2\circ} r$$

Dari graf komutatif D_6 , selanjutnya adalah menentukan matrik keterhubungan (*adjacemcy*) dan matrik derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Laplace* sebagai berikut:

Setelah didapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan

$$A(D_6) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(D_6) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L(D_6) = D(D_6) - A(D_6) = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$ dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 3, m(\lambda_4) = 1$. Sehingga didapatkan spektrum *Laplace* untuk graf komutatif D_6 adalah

$$spec_L(D_6) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Laplace* dari graf komutatif D_6, maka didapatkan nilai energi dari *Laplace* untuk graf komutatif D_6 adalah

$$E(D_6) = (1 \times 6) + (1 \times 3) + (3 \times 1) + (1 \times 0) = 6 + 3 + 3 + 0 = 12$$

2. Spektrum dan Energi *Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_8

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_8, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil operasi komposisi grup dihedral D_8 yaitu:

$$r^\circ 1 = 1^\circ r \qquad r^{2\circ} s = s^\circ r^2$$
$$r^{2\circ} 1 = 1^\circ r^2 \qquad r^{2\circ} sr = sr^\circ r^2$$
$$r^{3\circ} 1 = 1^\circ r^3 \qquad r^{2\circ} sr^2 = sr^{2\circ} r^2$$
$$s^\circ 1 = 1^\circ s \qquad r^{2\circ} sr^3 = sr^{3\circ} r^2$$
$$sr^\circ sr^3 = sr^{3\circ} sr$$
$$sr^\circ 1 = 1^\circ sr$$
$$sr^{2\circ} 1 = 1^\circ sr^2$$
$$sr^{3\circ} 1 = 1^\circ sr^3$$
$$r^\circ r^2 = r^{2\circ} r$$
$$r^\circ r^3 = r^{3\circ} r$$
$$r^{2\circ} r^3 = r^{3\circ} r^2$$

Dari graf komutatif D_8, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum Laplace maka dapat menghasilkan matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$A(D_8) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(D_8) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L(D_8) = D(D_8) - A(D_8) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 8$ dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 3, m(\lambda_4) = 2$. Sehingga didapatkan spektrum *Laplace* untuk graf komutatif D_8 adalah

$$spec_L(D_8) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Laplace* dari graf komutatif D_8, maka didapatkan nilai energi dari *Laplace* untuk graf komutatif D_8 adalah

$E(D_8) = (1 \times 0) + (2 \times 2) + (3 \times 4) + (2 \times 8) = 0 + 4 + 12 + 16 = 32$

3. Spektrum dan Energi *Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{10}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{10}, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil operasi komposisi grup dihedral D_8 yaitu:

$$\begin{array}{cc} r^\circ 1 = 1^\circ r & sr^{4\circ}1 = 1^\circ sr^4 \\ r^{2\circ}1 = 1^\circ r^2 & r^\circ r^2 = r^{2\circ}r \\ r^{3\circ}1 = 1^\circ r^3 & r^\circ r^3 = r^{3\circ}r \\ r^{4\circ}1 = 1^\circ r^4 & r^\circ r^4 = r^{4\circ}r \\ s^\circ 1 = 1^\circ s & r^{2\circ}r^3 = r^{3\circ}r^2 \\ sr^\circ 1 = 1^\circ sr & r^{2\circ}r^4 = r^{4\circ}r^2 \\ sr^{2\circ}1 = 1^\circ sr^2 & r^{3\circ}r^4 = r^{4\circ}r^3 \\ sr^{3\circ}1 = 1^\circ sr^3 & \end{array}$$

Dari graf komutatif D_{10}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan *adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Laplace* sebagai berikut:

Setelah didapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan

$$A(D_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(D_{10}) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L(D_{10}) = D(D_{10}) - A(D_{10}) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$ dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3, m(\lambda_3) = 5, m(\lambda_4) = 1$. Sehingga didapatkan spektrum *Laplace* untuk graf komutatif D_{10} adalah

$$spec_L(D_{10}) = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Laplace* dari graf komutatif D_{10}, maka didapatkan nilai energi dari *Laplace* untuk graf komutatif D_{10} adalah

$$E(D_8) = (1 \times 10) + (3 \times 5) + (5 \times 1) + (1 \times 0) = 10 + 15 + 5 + 0 = 30$$

4. Spektrum dan Energi *Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{12}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{12}, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil operasi komposisi grup dihedral D_{12} yaitu:

$$\begin{array}{cc} 1^\circ r = r^\circ 1 & r^{2\circ} r^3 = r^{3\circ} r^2 \\ 1^\circ r^3 = r^{3\circ} 1 & r^{2\circ} r^4 = r^{4\circ} r^2 \\ 1^\circ r^4 = r^{4\circ} 1 & r^{2\circ} r^5 = r^{5\circ} r^2 \\ 1^\circ r^5 = r^{5\circ} 1 & r^{3\circ} r^4 = r^{4\circ} r^3 \\ 1^\circ s = s^\circ 1 & r^{3\circ} r^5 = r^{5\circ} r^3 \\ 1^\circ sr = sr^\circ 1 & r^{3\circ} s = s^\circ r^3 \\ 1^\circ sr^2 = sr^{2\circ} 1 & r^{3\circ} sr = sr^\circ r^3 \\ 1^\circ sr^3 = sr^{3\circ} 1 & r^{3\circ} sr^2 = sr^{2\circ} r^3 \\ 1^\circ sr^4 = sr^{4\circ} 1 & r^{3\circ} sr^3 = sr^{3\circ} r^3 \end{array}$$

$$
\begin{array}{cc}
1^\circ sr^5 = sr^{5\circ}1 & r^{3\circ}sr^4 = sr^{4\circ}r^3 \\
r^\circ r^2 = r^{2\circ}r & r^{3\circ}sr^5 = sr^{5\circ}r^3 \\
r^\circ r^3 = r^{3\circ}r & r^{4\circ}r^5 = r^{5\circ}r^4 \\
r^\circ r^4 = r^{4\circ}r & s^\circ sr^3 = sr^{3\circ}s \\
r^\circ r^5 = r^{5\circ}r & sr^\circ sr^4 = sr^{4\circ}sr \\
 & sr^{2\circ}sr^5 = sr^{5\circ}sr^2
\end{array}
$$

Dari graf komutatif D_{12}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Laplace* sebagai berikut

Setelah didapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan

$$
A(D_{12}) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\qquad
D(D_{12}) = \begin{bmatrix}
11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{bmatrix}
$$

$$
L(D_{12}) = D(D_{12}) - A(D_{12}) = \begin{bmatrix}
11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3
\end{bmatrix}
$$

menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 6, \lambda_5 = 12$ dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3, m(\lambda_3) = 3, m(\lambda_4) = 3, m(\lambda_5) = 2$. Sehingga didapatkan spektrum *Laplace* untuk graf komutatif D_{12} adalah

$$
spec_L(D_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}
$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Laplace* dari graf komutatif D_{12}, maka didapatkan nilai energi dari *Laplace* untuk graf komutatif D_{12} adalah

$$
\begin{aligned}
E(D_{12}) &= (1 \times 0) + (3 \times 2) + (3 \times 4) + (3 \times 6) + (2 \times 12) = 0 + 6 + 12 + 18 + 24 \\
&= 60
\end{aligned}
$$

5. **Spektrum dan Energi *Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{14}**

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{14}, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{14} yaitu:

$$
1^\circ r = r^\circ 1 \qquad r^\circ r^3 = r^{3\circ}r
$$

$$
\begin{array}{cc}
1^\circ r^2 = r^{2\circ}1 & r^\circ r^4 = r^{4\circ}r \\
1^\circ r^3 = r^{3\circ}1 & r^\circ r^5 = r^{5\circ}r \\
1^\circ r^4 = r^{4\circ}1 & r^{2\circ}r^3 = r^{3\circ}r^2 \\
1^\circ r^5 = r^{5\circ}1 & r^{2\circ}r^4 = r^{4\circ}r^2 \\
1^\circ s = s^\circ 1 & r^{2\circ}r^5 = r^{5\circ}r^2 \\
1^\circ sr = sr^\circ 1 & r^{2\circ}r^6 = r^{6\circ}r^2 \\
1^\circ sr^3 = sr^{3\circ}1 & r^{3\circ}r^4 = r^{4\circ}r^3 \\
1^\circ sr^4 = sr^{4\circ}1 & r^{3\circ}r^5 = r^{5\circ}r^3 \\
1^\circ sr^5 = sr^{5\circ}1 & r^{3\circ}r^6 = r^{6\circ}r^3 \\
1^\circ sr^6 = sr^{6\circ}1 & r^{4\circ}r^5 = r^{5\circ}r^4 \\
r^\circ r^2 = r^{2\circ}r & r^{4\circ}r^6 = r^{6\circ}r^4 \\
 & r^{5\circ}r^6 = r^{6\circ}r^5
\end{array}
$$

Dari graf komutatif D_{14}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Laplace* sebagai berikut:

$$
A(D_{14}) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\quad
D(D_{14}) = \begin{bmatrix}
13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
L(D_{14}) = D(D_{14}) - A(D_{14}) = \begin{bmatrix}
13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1, \lambda_4 =$

0 dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 5, m(\lambda_3) = 7, m(\lambda_4) = 1$. Sehingga didapatkan spektrum *Laplace* untuk graf komutatif D_8 adalah

$$spec_L(D_{14}) = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Laplace* dari graf komutatif D_{14}, maka didapatkan nilai energi dari *Laplace* untuk graf komutatif D_{14} adalah

$$E(D_{14}) = (1 \times 14) + (5 \times 7) + (7 \times 1) + (1 \times 0) = 14 + 35 + 7 + 0 = 56$$

Dari uraian di atas maka dapat dibentuk tabel untuk memudahkan dalam menemukan pola umum dari spektrum dan energi *Laplace*

Tabel 1. Hasil perhitungan grup dihedral menggunakan spektrum dan energi *laplace*

No	Graf Komutatif dari grup	Spektrum Laplace	Energi Laplace
1	D_6	$spec_L(D_6) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_6) = (1 \times 6) + (1 \times 3) + (3 \times 1) + (1 \times 0)$
2	D_8	$spec_L(D_8) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$E(D_8) = (1 \times 0) + (2 \times 2) + (3 \times 4) + (2 \times 8)$
3	D_{10}	$spec_L(D_{10}) = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{10}) = (1 \times 10) + (3 \times 5) + (5 \times 1) + (1 \times 0)$
4	D_{12}	$spec_L(D_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$E(D_{12}) = (1 \times 0) + (3 \times 2) + (3 \times 4) + (3 \times 6) + (2 \times 12)$
5	D_{14}	$spec_L(D_{14}) = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{14}) = (1 \times 14) + (5 \times 7) + (7 \times 1) + (1 \times 0)$

Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral (D_{2n})

1. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_6

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_6, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_6 sebagai berikut:

$$r^\circ 1 = 1^\circ r$$
$$r^{2\circ} 1 = 1^\circ r^2$$
$$s^\circ 1 = 1^\circ s$$
$$sr^\circ 1 = 1^\circ sr$$
$$sr^{2\circ} 1 = 1^\circ sr^2$$
$$r^\circ r^2 = r^{2\circ} r$$

Dari graf komutatif D_6, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:
Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 =$

$$A(D_6) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(D_6) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L^+(D_6) = D(D_6) + A(D_6) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$3, \lambda_4 = 6$ dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3, m(\lambda_3) = 1, m(\lambda_4) = 1.$ Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_6 adalah

$$spec_{L^+}(D_6) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_6, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_6 adalah

$$E(D_6) = (1 \times 0) + (3 \times 1) + (1 \times 3) + (1 \times 6) = 0 + 3 + 3 + 6 = 12$$

2. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_8

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_8, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_8 sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc} r^\circ 1 = 1^\circ r & r^{2\circ} s = s^\circ r^2 \\ r^{2\circ} 1 = 1^\circ r^2 & r^{2\circ} sr = sr^\circ r^2 \\ r^{3\circ} 1 = 1^\circ r^3 & r^{2\circ} sr^2 = sr^{2\circ} r^2 \\ s^\circ 1 = 1^\circ s & r^{2\circ} sr^3 = sr^{3\circ} r^2 \\ sr^\circ sr^3 = sr^{3\circ} sr & \\ sr^\circ 1 = 1^\circ sr & \\ sr^{2\circ} 1 = 1^\circ sr^2 & \\ sr^{3\circ} 1 = 1^\circ sr^3 & \\ r^\circ r^2 = r^{2\circ} r & \\ r^\circ r^3 = r^{3\circ} r & \\ r^{2\circ} r^3 = r^{3\circ} r^2 & \end{array}$$

Dari graf komutatif D_8, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:

$$A(D_8) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(D_8) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L^+(D_8) = D(D_8) - A(D_8) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6, \lambda_4 = 10$ dan $m(\lambda_1) = 4, m(\lambda_2) = 2, m(\lambda_3) = 1, m(\lambda_4) = 1$.Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_8 adalah

$$spec_{L^+}(D_8) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_8, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_8 adalah

$$E(D_8) = (4 \times 2) + (2 \times 4) + (1 \times 6) + (1 \times 10) = 8 + 8 + 6 + 10 = 32$$

3. **Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{10}**

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{10}, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{10} sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc} r^\circ 1 = 1^\circ r & sr^{4\circ} 1 = 1^\circ sr^4 \\ r^{2\circ} 1 = 1^\circ r^2 & r^\circ r^2 = r^{2\circ} r \\ r^{3\circ} 1 = 1^\circ r^3 & r^\circ r^3 = r^{3\circ} r \\ r^{4\circ} 1 = 1^\circ r^4 & r^\circ r^4 = r^{4\circ} r \\ s^\circ 1 = 1^\circ s & r^{2\circ} r^3 = r^{3\circ} r^2 \\ sr^\circ 1 = 1^\circ sr & r^{2\circ} r^4 = r^{4\circ} r^2 \\ sr^{2\circ} 1 = 1^\circ sr^2 & r^{3\circ} r^4 = r^{4\circ} r^3 \\ sr^{3\circ} 1 = 1^\circ sr^3 & \end{array}$$

Dari graf komutatif D_{10}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:
Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen

$$A(D_{10}) = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad D(D_{10}) = \begin{bmatrix} 9&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&4&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&4&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&4&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&4&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$L^{+}(D_{10}) = D(D_{10}) + A(D_{10}) = \begin{bmatrix} 9&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&4&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&4&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&4&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&4&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 6, \lambda_5 = 10$ dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 4, m(\lambda_3) = 3, m(\lambda_4) = 1, m(\lambda_4) = 1$. Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{10} adalah

$$spec_{L^{+}}(D_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_{10}, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{10} adalah

$$E(D_{10}) = (1 \times 0) + (4 \times 1) + (3 \times 3) + (1 \times 6) + (1 \times 10)$$
$$= 0 + 4 + 9 + 6 + 10 = 29$$

4. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{12}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{12}, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{12} sebagai berikut:

$$1^{\circ}r = r^{\circ}1 \qquad r^{2\circ}r^3 = r^{3\circ}r^2$$
$$1^{\circ}r^3 = r^{3\circ}1 \qquad r^{2\circ}r^4 = r^{4\circ}r^2$$
$$1^{\circ}r^4 = r^{4\circ}1 \qquad r^{2\circ}r^5 = r^{5\circ}r^2$$
$$1^{\circ}r^5 = r^{5\circ}1 \qquad r^{3\circ}r^4 = r^{4\circ}r^3$$

$$
\begin{array}{cc}
1^\circ s = s^\circ 1 & r^{3\circ} r^5 = r^{5\circ} r^3 \\
1^\circ sr = sr^\circ 1 & r^{3\circ} s = s^\circ r^3 \\
1^\circ sr^2 = sr^{2\circ} 1 & r^{3\circ} sr = sr^\circ r^3 \\
1^\circ sr^3 = sr^{3\circ} 1 & r^{3\circ} sr^2 = sr^{2\circ} r^3 \\
1^\circ sr^4 = sr^{4\circ} 1 & r^{3\circ} sr^3 = sr^{3\circ} r^3 \\
1^\circ sr^5 = sr^{5\circ} 1 & r^{3\circ} sr^4 = sr^{4\circ} r^3 \\
r^\circ r^2 = r^{2\circ} r & r^{3\circ} sr^5 = sr^{5\circ} r^3 \\
r^\circ r^3 = r^{3\circ} r & r^{4\circ} r^5 = r^{5\circ} r^4 \\
r^\circ r^4 = r^{4\circ} r & s^\circ sr^3 = sr^{3\circ} s \\
r^\circ r^5 = r^{5\circ} r & sr^\circ sr^4 = sr^{4\circ} sr \\
sr^{2\circ} sr^5 = sr^{5\circ} sr^2 &
\end{array}
$$

Dari graf komutatif D_{12}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:

$$
A(D_{12}) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
L^+(D_{12}) = \begin{bmatrix}
11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{bmatrix}
$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 7, \lambda_5 = 10, \lambda_6 = 14$ dan $m(\lambda_1) = 3, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 5, m(\lambda_4) = 1, m(\lambda_5) = 1, m(\lambda_6) = 1$. Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{12} adalah

$$spec_{L^+}(D_{12}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & 10 & 14 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_{12}, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{12} adalah

$$
\begin{aligned}
E(D_{12}) &= (3 \times 2) + (1 \times 3) + (5 \times 4) + (1 \times 7) + (1 \times 10) + (1 \times 14) \\
&= 6 + 3 + 20 + 7 + 10 + 14 = 60
\end{aligned}
$$

5. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{14}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{14}, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{14} sebagai berikut:

$$
\begin{array}{cc}
1^\circ r = r^\circ 1 & r^\circ r^3 = r^{3\circ} r
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
1^{\circ}r^2 = r^{2\circ}1 & \quad & r^{\circ}r^4 = r^{4\circ}r \\
1^{\circ}r^3 = r^{3\circ}1 & & r^{\circ}r^5 = r^{5\circ}r \\
1^{\circ}r^4 = r^{4\circ}1 & & r^{2\circ}r^3 = r^{3\circ}r^2 \\
1^{\circ}r^5 = r^{5\circ}1 & & r^{2\circ}r^4 = r^{4\circ}r^2 \\
1^{\circ}s = s^{\circ}1 & & r^{2\circ}r^5 = r^{5\circ}r^2 \\
1^{\circ}sr = sr^{\circ}1 & & r^{2\circ}r^6 = r^{6\circ}r^2 \\
1^{\circ}sr^3 = sr^{3\circ}1 & & r^{3\circ}r^4 = r^{4\circ}r^3 \\
1^{\circ}sr^4 = sr^{4\circ}1 & & r^{3\circ}r^5 = r^{5\circ}r^3 \\
1^{\circ}sr^5 = sr^{5\circ}1 & & r^{3\circ}r^6 = r^{6\circ}r^3 \\
1^{\circ}sr^6 = sr^{6\circ}1 & & r^{4\circ}r^5 = r^{5\circ}r^4 \\
r^{\circ}r^2 = r^{2\circ}r & & r^{4\circ}r^6 = r^{6\circ}r^4 \\
 & & r^{5\circ}r^6 = r^{6\circ}r^5
\end{array}
$$

Dari graf komutatif D_{14}, selanjutnya adalah menetukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:

Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen

$$
A(D_{14}) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\qquad
D(D_{14}) = \begin{bmatrix}
13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
L^{+}(D_{14}) = D(D_{14}) + A(D_{14}) = \begin{bmatrix}
13 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 10, \lambda_5 = 15$ dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 6, m(\lambda_3) = 5, m(\lambda_4) = 1, m(\lambda_5) = 1$. Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{14} adalah

$$spec_{L^+}(D_{14}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 10 & 15 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_{14}, maka didapatkan nilai energi dari *Laplace* untuk graf komutatif D_{14} adalah

$$E(D_{14}) = (1 \times 0) + (6 \times 1) + (5 \times 5) + (1 \times 10) + (1 \times 15) = 0 + 6 + 25 + 10 + 15 = 56$$

6. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{16}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{16}, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{16} sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll}
1^\circ r = r^\circ 1 & r^\circ r^3 = r^{3\circ} r \\
1^\circ r^2 = r^{2\circ} 1 & r^\circ r^4 = r^{4\circ} r \\
1^\circ r^3 = r^{3\circ} 1 & r^\circ r^5 = r^{5\circ} r \\
1^\circ r^4 = r^{4\circ} 1 & r^{2\circ} r^3 = r^{3\circ} r^2 \\
1^\circ r^5 = r^{5\circ} 1 & r^{2\circ} r^4 = r^{4\circ} r^2 \\
1^\circ s = s^\circ 1 & r^{2\circ} r^5 = r^{5\circ} r^2 \\
1^\circ sr = sr^\circ 1 & r^{2\circ} r^6 = r^{6\circ} r^2 \\
1^\circ sr^3 = sr^{3\circ} 1 & r^{3\circ} r^4 = r^{4\circ} r^3 \\
1^\circ sr^4 = sr^{4\circ} 1 & r^{3\circ} r^5 = r^{5\circ} r^3 \\
1^\circ sr^5 = sr^{5\circ} 1 & r^{3\circ} r^6 = r^{6\circ} r^3 \\
1^\circ sr^6 = sr^{6\circ} 1 & r^{4\circ} r^5 = r^{5\circ} r^4 \\
r^\circ r^2 = r^{2\circ} r & r^{4\circ} r^6 = r^{6\circ} r^4 \\
 & r^{5\circ} r^6 = r^{6\circ} r^5
\end{array}$$

Dari graf komutatif D_{16}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:

$$A(D_{16}) = \begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\qquad
D(D_{16}) = \begin{bmatrix}
15&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&15&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&7&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3
\end{bmatrix}$$

$$L^+(D_{16}) = D(D_{16}) + A(D_{16}) = \begin{bmatrix}
15&1&1&1&&&&&&&&&&&&\\
1&7&1&1&&&&&&&&&&&&\\
1&1&7&1&&&&&&&&&&&&\\
1&1&1&7&&&&&&&&&&&&\\
1&1&1&1&&&&&&&&&&&&\\
1&1&1&1&&&&&&&&&&&&\\
1&1&1&1&1&1&7&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&7&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&3&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&3&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&3&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&1\\
1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&3&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&3&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&3&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&3
\end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 6, \lambda_5 = 10, \lambda_6 = 14, \lambda_7 = 19$ dan $m(\lambda_1) = 4, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 3, m(\lambda_4) = 5, m(\lambda_5) = 1, m(\lambda_6) = 1, m(\lambda_7) = 1.$ Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{16} adalah

$$spec_{L^+}(D_{16}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 10 & 14 & 19 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_{16}, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{16} adalah

$$E(D_{16}) = (4 \times 2) + (1 \times 3) + (3 \times 4) + (5 \times 6) + (1 \times 10) + (1 \times 14) + (1 \times 19) = 8 + 3 + 12 + 30 + 10 + 14 + 19 = 96$$

7. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{18}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{18}, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{18} sebagai berikut:

$1^\circ r = r^\circ 1$
$1^\circ r^2 = r^{2\circ} 1$
$1^\circ r^3 = r^{3\circ} 1$
$1^\circ r^4 = r^{4\circ} 1$
$1^\circ r^5 = r^{5\circ} 1$
$1^\circ r^6 = r^{6\circ} 1$
$1^\circ r^7 = r^{7\circ} 1$
$1^\circ r^8 = r^{8\circ} 1$
$1^\circ s = s^\circ 1$
$1^\circ sr = sr^\circ 1$
$1^\circ sr^2 = sr^{2\circ} 1$
$1^\circ sr^3 = sr^{3\circ} 1$
$1^\circ sr^4 = sr^{4\circ} 1$
$r^{5\circ} r^6 = r^{6\circ} r^5$
$r^{5\circ} r^7 = r^{7\circ} r^5$
$r^{5\circ} r^8 = r^{8\circ} r^5$
$1^\circ sr^5 = sr^{5\circ} 1$
$1^\circ sr^6 = sr^{6\circ} 1$
$1^\circ sr^7 = sr^{7\circ} 1$
$1^\circ sr^8 = sr^{8\circ} 1$
$r^\circ r^2 = r^{2\circ} r$
$r^\circ r^3 = r^{3\circ} r$
$r^\circ r^4 = r^{4\circ} r$
$r^\circ r^5 = r^{5\circ} r$
$r^\circ r^6 = r^{6\circ} r$
$r^\circ r^7 = r^{7\circ} r$
$r^\circ r^8 = r^{8\circ} r$
$r^{2\circ} r^3 = r^{3\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^4 = r^{4\circ} r^2$
$r^{6\circ} r^7 = r^{7\circ} r^6$
$r^{6\circ} r^8 = r^{8\circ} r^6$
$r^{7\circ} r^8 = r^{8\circ} r^7$
$r^{2\circ} r^5 = r^{5\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^6 = r^{6\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^7 = r^{7\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^8 = r^{8\circ} r^2$
$r^{3\circ} r^4 = r^{4\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^5 = r^{5\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^6 = r^{6\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^7 = r^{7\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^8 = r^{8\circ} r^3$
$r^{4\circ} r^5 = r^{5\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^6 = r^{6\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^7 = r^{7\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^8 = r^{8\circ} r^4$

Dari graf komutatif D_{18}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:

$$A(D_{18}) = \begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix} \quad D(D_{18}) = \begin{bmatrix}
17&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

$$L^{+}(D_{18}) = D(D_{18}) + A(D_{18}) = \begin{bmatrix}
17&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&8&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&8&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&8&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&8&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&8&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&8&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&8&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7, \lambda_4 = 13, \lambda_5 = 19$dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 8, m(\lambda_3) = 7, m(\lambda_4) = 1, m(\lambda_5) = 1$. Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{18} adalah

$$spec_{L^+}(D_{18}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 13 & 19 \\ 1 & 8 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_{18}, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{18} adalah

$$E(D_{18}) = (1 \times 0) + (8 \times 1) + (7 \times 7) + (1 \times 13) + (1 \times 19) = 0 + 8 + 49 + 13 + 19 = 89$$

8. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{20}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{20}, maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{20} sebagai berikut:

$1^\circ r = r^\circ 1$	$r^{2\circ} r^4 = r^{4\circ} r^2$	$r^{5\circ} sr^7 = sr^{7\circ} r^5$
$1^\circ r^2 = r^{2\circ} 1$	$r^{2\circ} r^5 = r^{5\circ} r^2$	$r^{5\circ} sr^8 = sr^{8\circ} r^5$
$1^\circ r^3 = r^{3\circ} 1$	$r^{2\circ} r^6 = r^{6\circ} r^2$	$r^{5\circ} sr^9 = sr^{9\circ} r^5$
$1^\circ r^4 = r^{4\circ} 1$	$r^{2\circ} r^7 = r^{7\circ} r^2$	$r^{6\circ} r^7 = r^{7\circ} r^6$
$1^\circ r^5 = r^{5\circ} 1$	$r^{2\circ} r^8 = r^{8\circ} r^2$	$r^{6\circ} r^8 = r^{8\circ} r^6$
$1^\circ r^6 = r^{6\circ} 1$	$r^{2\circ} r^9 = r^{9\circ} r^2$	$r^{6\circ} r^9 = r^{9\circ} r^6$
$1^\circ r^7 = r^{7\circ} 1$	$r^{3\circ} r^4 = r^{4\circ} r^3$	$r^{7\circ} r^8 = r^{8\circ} r^7$

$$
\begin{array}{ccc}
1^\circ r^8 = r^{8\circ}1 & r^{3\circ}r^5 = r^{5\circ}r^3 & r^{8\circ}r^9 = r^{9\circ}r^8 \\
1^\circ r^9 = r^{9\circ}1 & r^{3\circ}r^6 = r^{6\circ}r^3 & s^\circ sr^5 = sr^{5\circ}s \\
1^\circ s = s^\circ 1 & r^{3\circ}r^7 = r^{7\circ}r^3 & sr^\circ sr^6 = sr^{6\circ}sr \\
1^\circ sr = sr^\circ 1 & r^{3\circ}r^8 = r^{8\circ}r^3 & sr^{2\circ}sr^7 = sr^{7\circ}sr^2 \\
1^\circ sr^3 = sr^{3\circ}1 & r^{3\circ}r^9 = r^{9\circ}r^3 & sr^{3\circ}sr^8 = sr^{8\circ}sr^3 \\
1^\circ sr^4 = sr^{4\circ}1 & r^{4\circ}r^5 = r^{5\circ}r^4 & sr^{4\circ}sr^9 = sr^{9\circ}sr^4 \\
1^\circ sr^5 = sr^{5\circ}1 & r^{4\circ}r^6 = r^{6\circ}r^4 & r^{5\circ}sr^6 = sr^{6\circ}r^5 \\
1^\circ sr^6 = sr^{6\circ}1 & r^{4\circ}r^7 = r^{7\circ}r^4 & \\
1^\circ sr^7 = sr^{7\circ}1 & r^{4\circ}r^8 = r^{8\circ}r^4 & \\
1^\circ sr^8 = sr^{8\circ}1 & r^{4\circ}r^9 = r^{9\circ}r^4 & \\
1^\circ sr^9 = sr^{9\circ}1 & r^{5\circ}r^6 = r^{6\circ}r^5 & \\
r^\circ r^2 = r^{2\circ}r & r^{5\circ}r^7 = r^{7\circ}r^5 & \\
r^\circ r^3 = r^{3\circ}r & r^{5\circ}r^8 = r^{8\circ}r^5 & \\
r^\circ r^4 = r^{4\circ}r & r^{5\circ}r^9 = r^{9\circ}r^5 & \\
r^\circ r^5 = r^{5\circ}r & r^{5\circ}s = s^\circ r^5 & \\
r^\circ r^6 = r^{6\circ}r & r^{5\circ}sr = sr^\circ r^5 & \\
r^\circ r^7 = r^{7\circ}r & r^{5\circ}sr^2 = sr^{2\circ}r^5 & \\
r^\circ r^8 = r^{8\circ}r & r^{5\circ}sr^3 = sr^{3\circ}r^5 & \\
r^\circ r^9 = r^{9\circ}r & r^{5\circ}sr^4 = sr^{4\circ}r^5 & \\
r^{2\circ}r^3 = r^{3\circ}r^2 & r^{5\circ}sr^5 = sr^{5\circ}r^5 &
\end{array}
$$

Dari graf komutatif D_{20}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:

$$
A(D_{20}) = \begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{bmatrix}
\quad
D(D_{20}) = \begin{bmatrix}
19&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&19&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3
\end{bmatrix}
$$

$$
L^+(D_{20}) = D(D_{20}) + A(D_{20}) = \begin{bmatrix}
19&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&9&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&9&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&9&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&9&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&19&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&9&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&9&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&9&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&9&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&3&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&3&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&3&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&3&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&3
\end{bmatrix}
$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 8, \lambda_5 = 14, \lambda_6 = 18, \lambda_7 = 23$ dan $m(\lambda_1) = 5, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 3, m(\lambda_4) = 7, m(\lambda_5) = 1, m(\lambda_6) = 1, m(\lambda_7) = 1.$ Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{20} adalah

$$spec_{L^+}(D_{20}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 & 14 & 18 & 23 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_{20}, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{20} adalah

$$E(D_{20}) = (5 \times 2) + (1 \times 3) + (3 \times 4) + (7 \times 8) + (1 \times 14) + (1 \times 18) + (1 \times 23) = 10 + 3 + 12 + 56 + 14 + 18 + 23 = 136$$

9. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{22}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{22} maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{22} sebagai berikut:

$1^\circ r = r^\circ 1$	$1^\circ sr^5 = sr^{5\circ}1$	$r^{2\circ}r^5 = r^{5\circ}r^2$
$1^\circ r^2 = r^{2\circ}1$	$1^\circ sr^6 = sr^{6\circ}1$	$r^{2\circ}r^6 = r^{6\circ}r^2$
$1^\circ r^3 = r^{3\circ}1$	$1^\circ sr^7 = sr^{7\circ}1$	$r^{2\circ}r^7 = r^{7\circ}r^2$
$1^\circ r^4 = r^{4\circ}1$	$1^\circ sr^8 = sr^{8\circ}1$	$r^{2\circ}r^8 = r^{8\circ}r^2$
$1^\circ r^5 = r^{5\circ}1$	$r^\circ r^2 = r^{2\circ}r$	$r^{3\circ}r^4 = r^{4\circ}r^3$
$1^\circ r^6 = r^{6\circ}1$	$r^\circ r^3 = r^{3\circ}r$	$r^{3\circ}r^5 = r^{5\circ}r^3$
$1^\circ r^7 = r^{7\circ}1$	$r^\circ r^4 = r^{4\circ}r$	$r^{3\circ}r^6 = r^{6\circ}r^3$
$1^\circ r^8 = r^{8\circ}1$	$r^\circ r^5 = r^{5\circ}r$	$r^{3\circ}r^7 = r^{7\circ}r^3$
$1^\circ s = s^\circ 1$	$r^\circ r^6 = r^{6\circ}r$	$r^{3\circ}r^8 = r^{8\circ}r^3$
$1^\circ sr = sr^\circ 1$	$r^\circ r^7 = r^{7\circ}r$	$r^{4\circ}r^5 = r^{5\circ}r^4$
$1^\circ sr^2 = sr^{2\circ}1$	$r^\circ r^8 = r^{8\circ}r$	$r^{4\circ}r^6 = r^{6\circ}r^4$
$1^\circ sr^3 = sr^{3\circ}1$	$r^{2\circ}r^3 = r^{3\circ}r^2$	$r^{4\circ}r^7 = r^{7\circ}r^4$
$1^\circ sr^4 = sr^{4\circ}1$	$r^{2\circ}r^4 = r^{4\circ}r^2$	$r^{4\circ}r^8 = r^{8\circ}r^4$
$r^{5\circ}r^6 = r^{6\circ}r^5$	$r^{6\circ}r^7 = r^{7\circ}r^6$	$r^\circ r^9 = r^{9\circ}r$
$r^{5\circ}r^7 = r^{7\circ}r^5$	$r^{6\circ}r^8 = r^{8\circ}r^6$	$r^\circ r^{10} = r^{10\circ}r$
$r^{5\circ}r^8 = r^{8\circ}r^5$	$r^{7\circ}r^8 = r^{8\circ}r^7$	$r^{2\circ}r^9 = r^{9\circ}r^2$
$r^{2\circ}r^{10} = r^{10\circ}r^2$	$r^{4\circ}r^9 = r^{9\circ}r^4$	$r^{5\circ}r^{10} = r^{10\circ}r^5$
$r^{3\circ}r^9 = r^{9\circ}r^3$	$r^{4\circ}r^{10} = r^{10\circ}r^4$	$r^{6\circ}r^9 = r^{9\circ}r^6$
$r^{3\circ}r^{10} = r^{10\circ}r^3$	$r^{5\circ}r^9 = r^{9\circ}r^5$	$r^{6\circ}r^{10} = r^{10\circ}r^6$
$r^{7\circ}r^9 = r^{9\circ}r^7$	$r^{8\circ}r^{10} = r^{10\circ}r^8$	$1^\circ sr^{10} = sr^{10\circ}1$
$r^{7\circ}r^{10} = r^{10\circ}r^7$	$r^{9\circ}r^{10} = r^{10\circ}r^9$	$1^\circ r^9 = r^{9\circ}1$
$r^{8\circ}r^9 = r^{9\circ}r^8$	$1^\circ sr^9 = sr^{9\circ}1$	$1^\circ r^{10} = r^{10\circ}1$

Dari graf komutatif D_{22}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:

$$A(D_{22}) = \begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\quad
D(D_{22}) = \begin{bmatrix}
21&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

$$L^{+}(D_{22}) = D(D_{22}) + A(D_{22}) = \begin{bmatrix}
21&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&10&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&10&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&10&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&10&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&10&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&10&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&10&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&10&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&10&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&10&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 9, \lambda_4 = 17, \lambda_5 = 24$dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 10, m(\lambda_3) = 9, m(\lambda_4) = 1, m(\lambda_5) = 1$. Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{22} adalah

$$spec_{L^+}(D_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 & 17 & 24 \\ 1 & 10 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_{22}, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{22} adalah

$$E(D_{22}) = (1 \times 0) + (10 \times 1) + (9 \times 9) + (1 \times 17) + (1 \times 24)$$
$$= 0 + 10 + 81 + 17 + 24 = 132$$

10. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{24}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{24} maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{24} sebagai berikut:

$1^\circ r = r^\circ 1$
$1^\circ r^2 = r^{2\circ} 1$
$1^\circ r^3 = r^{3\circ} 1$
$1^\circ r^4 = r^{4\circ} 1$
$1^\circ r^5 = r^{5\circ} 1$
$1^\circ r^6 = r^{6\circ} 1$
$1^\circ r^7 = r^{7\circ} 1$
$1^\circ r^8 = r^{8\circ} 1$
$1^\circ r^9 = r^{9\circ} 1$
$1^\circ r^{10} = r^{10\circ} 1$
$1^\circ r^{11} = r^{11\circ} 1$
$1^\circ s = s^\circ 1$
$1^\circ sr = sr^\circ 1$
$1^\circ sr^3 = sr^{3\circ} 1$
$1^\circ sr^4 = sr^{4\circ} 1$
$1^\circ sr^5 = sr^{5\circ} 1$
$1^\circ sr^6 = sr^{6\circ} 1$
$1^\circ sr^7 = sr^{7\circ} 1$
$1^\circ sr^8 = sr^{8\circ} 1$
$1^\circ sr^9 = sr^{9\circ} 1$
$1^\circ sr^{10} = sr^{10\circ} 1$
$1^\circ sr^{11} = sr^{11\circ} 1$
$r^\circ r^2 = r^{2\circ} r$
$r^\circ r^3 = r^{3\circ} r$
$r^\circ r^4 = r^{4\circ} r$
$r^\circ r^5 = r^{5\circ} r$
$r^\circ r^6 = r^{6\circ} r$
$r^\circ r^7 = r^{7\circ} r$
$r^\circ r^8 = r^{8\circ} r$
$r^\circ r^9 = r^{9\circ} r$
$r^\circ r^{10} = r^{10\circ} r$
$r^\circ r^{11} = r^{11\circ} r$
$r^{2\circ} r^3 = r^{3\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^4 = r^{4\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^5 = r^{5\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^6 = r^{6\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^7 = r^{7\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^8 = r^{8\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^9 = r^{9\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^2$
$r^{3\circ} r^4 = r^{4\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^5 = r^{5\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^6 = r^{6\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^7 = r^{7\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^8 = r^{8\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^9 = r^{9\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^3$
$r^{4\circ} r^6 = r^{6\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^7 = r^{7\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^8 = r^{8\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^9 = r^{9\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^4$
$r^{5\circ} r^6 = r^{6\circ} r^5$
$r^{5\circ} r^7 = r^{7\circ} r^5$
$r^{5\circ} r^8 = r^{8\circ} r^5$
$r^{5\circ} r^9 = r^{9\circ} r^5$
$r^{5\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^5$
$r^{5\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^5$
$r^{6\circ} r^7 = r^{7\circ} r^6$
$r^{6\circ} r^8 = r^{8\circ} r^6$
$r^{6\circ} r^9 = r^{9\circ} r^6$
$r^{6\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^6$
$r^{6\circ} s = s^\circ r^6$
$r^{6\circ} sr = sr^\circ r^6$
$r^{6\circ} sr^2 = sr^{2\circ} r^6$
$r^{6\circ} sr^3 = sr^{3\circ} r^6$
$r^{6\circ} sr^4 = sr^{4\circ} r^6$
$r^{6\circ} sr^5 = sr^{5\circ} r^6$
$r^{6\circ} sr^6 = sr^{6\circ} r^6$
$r^{6\circ} sr^7 = sr^{7\circ} r^6$
$r^{6\circ} sr^8 = sr^{8\circ} r^6$
$r^{6\circ} sr^9 = sr^{9\circ} r^6$
$r^{6\circ} sr^{10} = sr^{10\circ} r^6$
$r^{6\circ} sr^{11} = sr^{11\circ} r^6$
$r^{7\circ} r^8 = r^{8\circ} r^7$
$r^{7\circ} r^9 = r^{9\circ} r^7$
$r^{7\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^7$
$r^{7\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^7$
$r^{8\circ} r^9 = r^{9\circ} r^8$
$r^{8\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^8$
$r^{8\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^8$
$r^{9\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^9$
$r^{9\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^9$
$r^{10\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^{10}$
$s^\circ sr^6 = sr^{6\circ} s$
$sr^\circ sr^7 = sr^{7\circ} sr$
$sr^{2\circ} sr^8 = sr^{8\circ} sr^2$
$sr^{3\circ} sr^9 = sr^{9\circ} sr^3$
$sr^{4\circ} sr^{10} = sr^{10\circ} sr^4$
$sr^{5\circ} sr^{11} = sr^{11\circ} sr$^5
$r^{4\circ} r^5 = r^{5\circ} r^4$

Dari graf komutatif D_{24}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:

$$A(D_{24}) = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

$$D(D_{24}) = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right]$$

$$L^{+}(D_{24}) = D(D_{24}) + A(D_{24}) = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
23 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 23 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right]$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 10, \lambda_5 = 17, \lambda_6 = 22, \lambda_7 = 27$ dan $m(\lambda_1) = 6, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = 5, m(\lambda_4) = 9, m(\lambda_5) = 1, m(\lambda_6) = 1, m(\lambda_7) = 1.$ Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{24} adalah

$$spec_{L^{+}}(D_{24}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 10 & 17 & 22 & 27 \\ 6 & 1 & 5 & 9 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_{24}, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{24} adalah

$$E(D_{24}) = (6 \times 2) + (1 \times 3) + (5 \times 4) + (9 \times 10) + (1 \times 17) + (1 \times 22) + (1 \times 27) = 12 = 3 + 20 + 90 + 17 + 22 + 27 = 129$$

11. Spektrum dan Energi *Signless-Laplace* Graf Komutatif dari Grup Dihedral D_{26}

Hasil operasi komposisi dari grup dihedral D_{26} maka dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi °. Berikut adalah daftar elemen-elemen dari hasil komposisi grup dihedral D_{24} sebagai berikut:

$1^\circ r = r^\circ 1$
$1^\circ r^2 = r^{2\circ} 1$
$1^\circ r^3 = r^{3\circ} 1$
$1^\circ r^4 = r^{4\circ} 1$
$1^\circ r^5 = r^{5\circ} 1$
$1^\circ r^6 = r^{6\circ} 1$
$1^\circ r^7 = r^{7\circ} 1$
$1^\circ r^8 = r^{8\circ} 1$
$1^\circ s = s^\circ 1$
$1^\circ sr = sr^\circ 1$
$1^\circ sr^2 = sr^{2\circ} 1$
$1^\circ sr^3 = sr^{3\circ} 1$
$1^\circ sr^4 = sr^{4\circ} 1$
$r^{5\circ} r^6 = r^{6\circ} r^5$
$r^{5\circ} r^7 = r^{7\circ} r^5$
$r^{5\circ} r^8 = r^{8\circ} r^5$
$r^{2\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^2$
$r^{3\circ} r^9 = r^{9\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^3$
$r^{7\circ} r^9 = r^{9\circ} r^7$
$r^{7\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^7$
$r^{8\circ} r^9 = r^{9\circ} r^8$
$1^\circ r^{11} = r^{11\circ} 1$
$1^\circ r^{12} = r^{12\circ} 1$
$1^\circ sr^{11} = sr^{11\circ} 1$
$1^\circ sr^{12} = sr^{12\circ} 1$

$1^\circ sr^5 = sr^{5\circ} 1$
$1^\circ sr^6 = sr^{6\circ} 1$
$1^\circ sr^7 = sr^{7\circ} 1$
$1^\circ sr^8 = sr^{8\circ} 1$
$r^\circ r^2 = r^{2\circ} r$
$r^\circ r^3 = r^{3\circ} r$
$r^\circ r^4 = r^{4\circ} r$
$r^\circ r^5 = r^{5\circ} r$
$r^\circ r^6 = r^{6\circ} r$
$r^\circ r^7 = r^{7\circ} r$
$r^\circ r^8 = r^{8\circ} r$
$r^{2\circ} r^3 = r^{3\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^4 = r^{4\circ} r^2$
$r^{6\circ} r^7 = r^{7\circ} r^6$
$r^{6\circ} r^8 = r^{8\circ} r^6$
$r^{7\circ} r^8 = r^{8\circ} r^7$
$r^{4\circ} r^9 = r^{9\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^4$
$r^{5\circ} r^9 = r^{9\circ} r^5$
$r^{8\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^8$
$r^{9\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^9$
$1^\circ sr^9 = sr^{9\circ} 1$
$r^{9\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^9$
$r^{9\circ} r^{12} = r^{12\circ} r^9$
$r^{10\circ} r^{11} = r^{11\circ} r^{10}$
$r^{10\circ} r^{12} = r^{12\circ} r^{10}$

$r^{2\circ} r^5 = r^{5\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^6 = r^{6\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^7 = r^{7\circ} r^2$
$r^{2\circ} r^8 = r^{8\circ} r^2$
$r^{3\circ} r^4 = r^{4\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^5 = r^{5\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^6 = r^{6\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^7 = r^{7\circ} r^3$
$r^{3\circ} r^8 = r^{8\circ} r^3$
$r^{4\circ} r^5 = r^{5\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^6 = r^{6\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^7 = r^{7\circ} r^4$
$r^{4\circ} r^8 = r^{8\circ} r^4$
$r^\circ r^9 = r^{9\circ} r$
$r^\circ r^{10} = r^{10\circ} r$
$r^{2\circ} r^9 = r^{9\circ} r^2$
$r^{5\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^5$
$r^{6\circ} r^9 = r^{9\circ} r^6$
$r^{6\circ} r^{10} = r^{10\circ} r^6$
$1^\circ sr^{10} = sr^{10\circ} 1$
$1^\circ r^9 = r^{9\circ} 1$
$1^\circ r^{10} = r^{10\circ} 1$
$r^{11\circ} r^{12} = r^{12\circ} r^{11}$

Dari graf komutatif D_{26}, selanjutnya adalah menentukan matriks keterhubungan (*adjacency*) dan matriks derajat (*degree*). Dengan menggunakan rumus perhitungan spektrum *Signless-Laplace* maka dapat menghasilkan matriks *Signless-Laplace* sebagai berikut:

$$A(D_{26}) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$D(D_{26}) = \begin{bmatrix}
25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$L^{+}(D_{26}) = D(D_{26}) + A(D_{26}) = \begin{bmatrix}
25 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan bentuk matriks *Signless-Laplace* maka akan dicari nilai eigen dengan menggunakan aplikasi *maple* sehingga didapatkan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 11, \lambda_4 = 20, \lambda_5 = 28$dan $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 12, m(\lambda_3) = 11, m(\lambda_4) = 1, m(\lambda_5) = 1$. Sehingga didapatkan spektrum *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{26} adalah

$$spec_{L^+}(D_{26}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 & 20 & 28 \\ 1 & 12 & 11 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui nilai spektrum *Signless-Laplace* dari graf komutatif D_{26}, maka didapatkan nilai energi dari *Signless-Laplace* untuk graf komutatif D_{26} adalah

$$E(D_{26}) = (1 \times 0) + (12 \times 1) + (11 \times 11) + (1 \times 20) + (1 \times 28)$$
$$= 0 + 12 + 121 + 20 + 28 = 181$$

Dari uraian di atas maka dapat dibentuk tabel untuk memudahkan dalam menemukan pola umum dari spektrum dan energi *Signless-Laplace*

Tabel 2. hasil perhitungan grup dihedral menggunakan spektrum dan energi *signless-laplace*

No	Graf Komutatif dari grup	Spektrum Signless-Laplace	Energi Signless-Laplace
1	D_6	$spec_{L^+}(D_6) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_6) = (1 \times 0) + (3 \times 1) + (1 \times 3) + (1 \times 6)$
2	D_8	$spec_{L^+}(D_8) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_8) = (4 \times 2) + (2 \times 4) + (1 \times 6) + (1 \times 10)$
3	D_{10}	$spec_{L^+}(D_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{10}) = (1 \times 0) + (4 \times 1) + (3 \times 3) + (1 \times 6) + (1 \times 10)$
4	D_{12}	$spec_{L^+}(D_{12}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & 10 & 14 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{12}) = (3 \times 2) + (1 \times 3 + (5 \times 4) + (1 \times 7) + (1 \times 10) + (1 \times 14)$
5	D_{14}	$spec_{L^+}(D_{14}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 10 & 15 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{14}) = (1 \times 0) + (6 \times 1) + (5 \times 5) + (1 \times 10) + (1 \times 15)$
6	D_{16}	$spec_{L^+}(D_{16}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 10 & 14 & 19 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{16}) = (4 \times 2) + (1 \times 3) + (3 \times 4) + (5 \times 6) + (1 \times 10) + (1 \times 14) + (1 \times 19)$
7	D_{18}	$spec_{L^+}(D_{18}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 13 & 19 \\ 1 & 8 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{18}) = (1 \times 0) + (8 \times 1) + (7 \times 7) + (1 \times 13) + (1 \times 19)$
8	D_{20}	$spec_{L^+}(D_{20}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 & 14 & 18 & 23 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{20}) = (5 \times 2) + (1 \times 3) + (3 \times 4) + (7 \times 8) + (1 \times 14) + (1 \times 18) + (1 \times 23)$

9	D_{22}	$spec_{L^+}(D_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 & 17 & 24 \\ 1 & 10 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{22}) = (1 \times 0) + (10 \times 1) + (9 \times 9) + (1 \times 17) + (1 \times 24)$
10	D_{24}	$spec_{L^+}(D_{24}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 10 & 17 & 22 & 27 \\ 6 & 1 & 5 & 9 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{24}) = (6 \times 2) + (1 \times 3) + (5 \times 4) + (9 \times 10) + (1 \times 17) + (1 \times 22) + (1 \times 27)$
11	D_{26}	$spec_{L^+}(D_{26}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 & 20 & 28 \\ 1 & 12 & 11 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$E(D_{26}) = (1 \times 0) + (12 \times 1) + (11 \times 11) + (1 \times 20) + (1 \times 28)$

Kesimpulan

Berdasarkan perhitungan menggunakan Spektrum dan Energi *Laplace* serta *Signless Laplace*, maka dapat diketahui bahwa pada hasil perhitungan spektrum *Laplace* graf komutatif dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil didapatkan suatu pola umum yaitu:

$$spec_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2n & n & 1 & 0 \\ 1 & n-2 & n & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan pada spektrum *Laplace* dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap tidak menemukan pola umum.
Sehingga didapatkan 2 teorema yaitu:

Teorema 1
Misalkan terdapat D_{2n} merupakan suatu grup dihedral dengan n ganjil dimana $n \geq 3$. Maka untuk spektrum *Laplace* dari D_{2n} dengan n ganjil adalah:

$$spec_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} 2n & n & 1 & 0 \\ 1 & n-2 & n & 1 \end{bmatrix}$$

Pembuktian:
Dapat diketahui bahwa suatu grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Maka dapat diperoleh 1 komutatif dengan semua unsur yang lain karena adanya identitas $r^k r^j = r^j r^j$, berlaku untuk semua $1 \leq k, j \leq n-1$ dengan syarat $i \neq j$. Selain

itu tidak adanya untuk yang saling komutatif sehingga dapat diperoleh suatu matrik keterhubungan (*adjacency*) titik yaitu:

$$A(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Selain diperoleh suatu matrik keterhubungan (*adjacency*), diperoleh juga matrik derajat (*degree*) yaitu

$$D(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Rumus dari matriks *Laplace* adalah $L(D_{2n}) = D(D_{2n}) - A(D_{2n})$. Dari rumus perhitungan matriks *Laplace* diperoleh matriks *Laplace* graf komutatif dari grup dihedral (D_{2n}) yaitu

$$L(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 2

Misalkan terdapat D_{2n} merupakan suatu grup dihedral dengan n ganjil dimana $n \geq 3$. Maka untuk enegri *Laplace* dari D_{2n} dengan n ganjil adalah:

$$E(D_{2n}) = \big(1 \times (2n)\big) + \Big((n-2) \times (n) + \big((n) \times 1\big) + (1 \times 0)\Big)$$

Sedangkan pada spektrum *Singless-Laplace* dan energi *Laplace* graf komutatif dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan n genap tidak menemukan pola umum dikarenakan nilai eigen dengan bilangan kompleks.

Daftar Pustaka

Abdussakir, Akhadiyah, D. A., Layali, A., & Putra, A. T. (2017). Spektrum graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral. *Laporan Penelitian*, 18–19. http://repository.uin-malang.ac.id/2188/

Drs. Marsudi, M. . (2016). *Teori Graf*. Malang: UB Press.

G, S., & Kanna, R. (2017). Bounds on Energy and Laplacian Energy of Graphs. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 23(2), 21–31. https://doi.org/10.22342/jims.23.2.316.21-31

Khasanah, R. (n.d.). *Spektrum Signless - Laplace dan Spektrum Detour Graf Konjugasi dari Grup Dihedral*. *III*(1), 45–51.

Setyowidi, D. D., Si, L. R. S., Si, M., Studi, P., Jurusan, M., Universitas, M., & Semarang, D. (n.d.). *Energi Derajat Maksimal pada Graf Terhubung*. 46–55.

Taneo, F. D. & P. N. L. (2019). *Teori Graf*. Deepublish Publisher.