Maliki Interdisciplinary Journal (MIJ) eISSN: 3024-8140
Volume 2, Issue 12, 2024 pp. 1098-1103 http://urj.uin-malang.ac.id/index.php/mij/index

Eksplorasi hubungan persamaan gelombang satu dimensi dengan *Random Walks Problems*, ekspektasi, varians, dan *Unidirectional Linear Wave Motion*

Siti Safira Khoirotunnisa
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
*e-mail: *210601110001@student.uin-malang.ac.id*

Kata Kunci:
PDP; hubungan; persamaan; ekspektasi; varians

Keywords:
PDEs; relationship; equation; expectation; variance

A B S T R A K

Pemahaman tentang persamaan diferensial parsial (PDP) penting kaitannya dalam ilmu pengetahuan. PDP memiliki dua atau lebih variabel bebas yang dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang. Salah satu PDP yang luas digunakan adalah persamaan gelombang satu dimensi, yang merepresentasikan fenomena fisik sehari-hari. Penelitian ini mengeksplorasi hubungan antara persamaan gelombang satu dimensi dengan beberapa topik terkait seperti random walks problems, ekspektasi dan varians, dan unidirectional linear wave motion. Pertama, penelitian membahas dasar-dasar persamaan gelombang satu dimensi beserta metode penyelesaiannya. Selanjutnya, dikaji mengenai korelasi antara persamaan gelombang dengan random walks problems, yang memberikan wawasan tentang pergerakan partikel atau gelombang dalam medium tertentu. Analisis ekspektasi dan varians suhu dalam konteks statistik menjadi kajian selanjutnya untuk memahami distribusi energi atau fenomena gelombang yang kompleks. Terakhir, penelitian mengkaji unidirectional linear wave motion dan penerapannya guna menyelesaikan masalah dengan menggunakan metode karakteristik.

A B S T R A C T

Understanding partial differential equations (PDEs) is crucial in the realm of science. PDEs involve two or more independent variables and can be applied across various fields. One widely used PDE is the one-dimensional wave equation, which represents everyday physical phenomena. This research explores the relationship between the one-dimensional wave equation and several related topics, such as random walks problems, expectation and variance, and unidirectional linear wave motion. First, the study discusses the fundamentals of the one-dimensional wave equation and its solution methods. Next, it examines the correlation between the wave equation and random walks problems, providing insights into the movement of particles or waves within a specific medium. The analysis then delves into the expectation and variance of temperature in a statistical context to understand the energy distribution or complex wave phenomena. Finally, the research investigates unidirectional linear wave motion and its application in solving problems using the method of characteristics.

Pendahuluan

Dalam dunia ilmu pengetahuan, pemahaman tentang persamaan diferensial parsial (PDP) sangatlah penting. Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial parsial yang memiliki dua atau lebih variabel bebas (Maulidi, 2018). Salah satu persamaan diferensial parsial yang memiliki aplikasi luas adalah persamaan gelombang satu dimensi. Persamaan gelombang merupakan salah satu persamaan diferensial yang merepresentasikan fenomena fisis yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari (Noor dkk., 2019). Persamaan ini tidak hanya penting dalam fisika, tetapi juga dalam matematika terapan dan rekayasa. Pada penelitian ini penulis akan menjelajahi hubungan antara persamaan gelombang satu dimensi dengan berbagai topik terkait, mulai dari *random walks problems*, ekspektasi dan varians, hingga persamaan difusi, panas, dan gelombang lainnya, termasuk *unidirectional linear wave motion*.

Subbab 1: Persamaan gelombang satu dimensi. Pertama-tama, penulis akan memperkenalkan persamaan gelombang satu dimensi, yang dinyatakan sebagai $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Persamaan ini menggambarkan perambatan gelombang dengan kecepatan c dalam medium yang elastis. Analisis awal akan fokus pada konsep dasar persamaan gelombang dan metode penyelesaiannya.

Subbab 2: Hubungan dengan *random walks problems*. Kemudian, penulis akan menjelaskan korelasi antara persamaan gelombang satu dimensi dengan *random walks problems*. Konsep random walks problems dapat dihubungkan dengan analisis karakteristik persamaan gelombang, yang memberikan wawasan tentang pergerakan partikel atau gelombang dalam medium tertentu. Subbab 3: Analisis Ekspektasi dan Varians. Selanjutnya, akan dibahas bagaimana ekspektasi dan varians dapat diterapkan dalam konteks persamaan gelombang satu dimensi. Ekspektasi dan varians ini dapat diinterpretasikan sebagai nilai rata-rata dan variasi dari distribusi gelombang dalam medium, yang penting untuk memahami distribusi energi atau fenomena gelombang yang kompleks. Subbab 4: Analisis *unidirectional linear wave motion*. Terakhir, penulis akan membahas konsep *unidirectional linear wave motion* dan bagaimana persamaan gelombang satu dimensi dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah *unidirectional linear wave motion*. Metode karakteristik akan digunakan dalam analisis ini untuk memperoleh solusi yang memenuhi kondisi awal yang diberikan.

Dengan menjelajahi hubungan antara persamaan gelombang satu dimensi dengan subbab-subbab terkait, akan diharapkan mendapatkan pemahaman yang lebih dalam tentang kompleksitas perambatan gelombang dan penerapannya dalam berbagai konteks ilmiah dan rekayasa. Peenlitian ini akan memberikan wawasan yang berharga bagi pemodelan fenomena fisika dan pengembangan solusi untuk masalah-masalah yang kompleks.

Pembahasan

Persamaan Gelombang Satu Dimensi

Persamaan gelombang satu dimensi merupakan model matematika yang fundamental dalam menjelaskan perambatan gelombang dalam medium yang elastis. Persamaan ini secara matematis dinyatakan sebagai $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ di mana u adalah fungsi yang menyatakan gelombang yang bergantung pada waktu t dan posisi x, sedangkan c adalah kecepatan perambatan gelombang dalam medium tersebut. Salah satu masalah fisis yang sering dijumpai adalah masalah gelombang. Persamaan gelombang merupakan persamaan yang sangat penting dalam matematika terapan.

Terdapat bermacam-macam masalah gelombang, salah satunya adalah masalah getaran dari dawai yang diregangkan (Noor dkk., 2019). Kesederhanaan matematika persamaan ini memungkinkan aplikasinya dalam berbagai bidang ilmu, termasuk fisika, matematika terapan, rekayasa, dan ilmu komputasi, menjadikannya salah satu konsep yang sangat penting dan relevan dalam pemodelan fenomena gelombang.

Random Walks Problem

Persamaan diferensial parsial yang akan dibahas adalah bentuk persamaan gelombang satu dimensi dalam notasi yang lebih singkat. Persamaan ini adalah bentuk umum dari persamaan gelombang untuk gelombang yang merambat dalam satu dimensi spasial.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Di sini, $u(x,t)$ adalah fungsi yang menggambarkan gelombang pada posisi x dan waktu t, c adalah kecepatan gelombang, $\frac{\partial u}{\partial t}$ adalah turunan parsial pertama terhadap waktu, dan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ adalah turunan kedua terhadap posisi x. Persamaan ini mencerminkan fakta bahwa laju perubahan gelombang terhadap waktu sama dengan kecepatan gelombang c dikuadrat kali gradien kedua gelombang terhadap posisi x. Ini adalah konsep dasar dalam pemodelan gelombang fisika, seperti gelombang bunyi atau gelombang pada tali.

Dalam konteks konduksi panas, persamaan ini juga dapat digunakan untuk memodelkan perpindahan panas dalam satu dimensi, di mana $u(x,t)$ adalah suhu pada posisi x dan waktu t, dan c adalah koefisien konduktivitas panas. Dalam hal ini, persamaan ini dikenal sebagai Persamaan Konduksi Panas atau Persamaan Panas. Konsep langkah acak sering digunakan dalam konteks persamaan difusi. Sebuah lintasan acak adalah proses acak dalam ruang matematika. Ini menggambarkan suatu jalur yang terdiri dari rangkaian langkah-langkah acak dalam ruang matematika (Xia dkk., 2020). Langkah-langkah acak dari partikel-partikel dalam media dapat dianalogikan dengan pergerakan partikel dalam persamaan difusi, terutama dalam konteks perpindahan panas atau zat dalam media.

Persamaan difusi $\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sering kali digunakan untuk memodelkan langkah-langkah acak dalam masalah fisika, seperti partikel yang bergerak secara acak dalam suatu medium. Ketika D adalah koefisien difusi, maka persamaan tersebut menjadi mirip dengan persamaan diferensial parsial gelombang $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Hubungan ini mengindikasikan bahwa fenomena langkah acak dalam media dapat dianalogikan dengan gelombang yang merambat dengan kecepatan c.

Ekspektasi dan Varians

Dalam konteks persamaan diferensial parsial, ekspektasi dan varians dapat dikaitkan dengan analisis statistik dari solusi persamaan. Misalnya, jika $u(x,t)$ adalah distribusi suhu dalam suatu benda pada waktu t, maka ekspektasi suhu $\mathbb{E}[u]$ dan varians suhu $Var[u]$ dapat dihitung dari solusi persamaan tersebut.

Untuk mengkaitkan persamaan diferensial parsial $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dengan ekspektasi dan varians, akan dipertimbangkan distribusi suhu $u(x,t)$ sebagai suatu variabel acak dalam konteks statistik. Misalnya, dapat diperlakukan suhu pada titik x dan waktu t sebagai variabel acak yang memiliki distribusi probabilitas tertentu.

Ekspektasi Suhu

Ekspektasi suhu $\mathbb{E}[u(x,t)]$ dapat didefinisikan sebagai nilai rata-rata dari distribusi suhu pada posisi x dan waktu t. Untuk menghitung ekspektasi suhu pada posisi $p(u,x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, di mana π adalah nilai rata-rata suhu dan σ^2 adalah varians suhu. Kemudian, ekspektasi suhu dihitung sebagai berikut:

$$\mathbb{E}[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot p(u,x,t) du = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du$$

Untuk menyelesaikan integrasi ini, kita dapat menggunakan substitusi $z = \frac{u-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$, sehingga $du = \sqrt{2\sigma^2} dz$. Integrasi menjadi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(x,t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}\, z + \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-z^2) dz \\ &= \sqrt{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) dz + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(z^2) dz.\end{aligned}$$

Integral pertama adalah integral Gauss yang bernilai 1. Jadi, ekspektasi suhu menjadi:

$$\mathbb{E}[u(x,t)] = \mu$$

Artinya, nilai ekspektasi suhu pada posisi x dan waktu t adalah nilai rata-rata suhu (μ) yang diasumsikan.

Varians Suhu

Varians suhu adalah:

$$Var[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (u-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du$$

Substitusi $z = \frac{u-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$, sehingga $du = \sqrt{2\sigma^2} dz$. Integrasi menjadi:

$$Var[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2\sigma^2} z\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) dz = 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-z^2) dz$$

Integral ini adalah integral Gauss yang merupakan nilai ekspektasi dari z^2, yang bernilai 1. Jadi, varians suhu menjadi:

$$Var[u(x,t)] = 2\sigma^2$$

Varians suhu pada posisi x dan t adalah dua kali lipat varians yang diasumsikan ($2\sigma^2$). Dengan demikian, solusi untuk ekspektasi suhu $\mathbb{E}[u(x,t)]$ adalah nilai rata-rata suhu (μ). Sementara solusi untuk varians suhu $Var[u(x,t)]$ adalah dua kali lipat varians yang diasumsikan ($2\sigma^2$).

Unidirectional Linear Wave Motion

Wave motion, sekarang seperti sebelumnya, dalam berbagai fenomena fisika yang beragam, dan pemahaman tentangnya tercermin dalam evolusi teori-teori terkait. Daftar perkembangan teknologi yang mengesankan berkaitan dengan contoh propagasi gelombang dalam bahan atau lingkungan akustik/elektrik; dan gangguan alami yang kurang umum namun signifikan seperti yang berasal dari seismik atau pasang surut menarik perhatian pada aspek praktis dan teoretis dari gerakan gelombang dalam skala terestrial (Levine, 1978).

Unidirectional Linear Wave Motion (Gerakan Gelombang Linier Unidireksional) dapat dianalisis dalam konteks persamaan diferensial parsial gelombang yang berikan, yaitu $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Persamaan diferensial parsial tersebut menggambarkan bagaimana gelombang linier bergerak dalam suatu medium secara unidireksional (misalnya, gelombang pada tali yang dipegang di kedua ujungnya). Variabel $u(x,t)$ dapat diinterpretasikan sebagai defleksi atau amplitudo gelombang pada posisi x dan waktu t. Koefisien c^2 menentukan kecepatan perambatan gelombang, yang tergantung pada sifat medium dan kondisi awal gelombang.

Solusi umum dari persamaan gelombang seperti $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dapat dinyatakan dalam bentuk gelombang bergerak: $u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ di mana f dan g adalah fungsi-fungsi yang menentukan bentuk gelombang pada waktu $t = 0$, dan c adalah kecepatan gelombang. Hal tersebut menunjukkan bahwa gelombang bergerak ke arah positif sumbu x dengan kecepatan c, tanpa adanya perubahan bentuk gelombang saat bergerak (asumsi unidireksional linier).

Dalam konteks unidirectional linear wave motion, distribusi energi gelombang juga dapat dianalisis. Energi total dalam gelombang linier dapat dihitung sebagai integral dari energi kinetik dan potensial gelombang, yang terkait dengan amplitudo gelombang dan kecepatan perambatan. Distribusi energi gelombang dalam ruang dan waktu dapat memberikan wawasan tentang bagaimana energi gelombang mengalir dan bertahan selama gerakan gelombang linier.

Konsep unidirectional linear wave motion sangat relevan dalam berbagai bidang, seperti akustik (gelombang bunyi), geofisika (gelombang seismik), optika (gelombang cahaya), dan mekanika (gelombang pada tali atau pegas. Dalam aplikasi praktis, analisis gerakan gelombang linier membantu dalam merancang sistem atau struktur yang terkait dengan propagasi gelombang, seperti desain instrumen musik, pemodelan gempa bumi, atau pengembangan teknologi komunikasi optik.

Dengan demikian, analisis unidirectional linear wave motion dalam konteks persamaan diferensial parsial gelombang memberikan pemahaman yang mendalam tentang sifat dan perilaku gelombang linier dalam berbagai aplikasi fisika dan teknik.

Kesimpulan dan Saran

Dalam pembandingan persamaan gelombang satu dimensi dengan subbab-subbab yang terkait seperti random walks problem, ekspektasi dan varians, persamaan difusi, panas, gelombang, dan unidirectional linear wave motion, kami dapat membuat beberapa kesimpulan penting:

1. Korelasi dengan *Random Walks Problem :* Persamaan gelombang satu dimensi dapat dikaitkan dengan *random walks problem* melalui analisis karakteristik. Misalnya, solusi dari persamaan gelombang dapat digunakan untuk memprediksi perilaku partikel dalam *random walks* dengan kondisi tertentu.
2. Ekspektasi dan Varians : Dalam konteks persamaan gelombang, ekspektasi dan varians dapat diinterpretasikan sebagai nilai rata-rata dan variasi dari distribusi gelombang atau getaran dalam medium. Analisis ini berguna dalam memahami distribusi energi atau fenomena gelombang yang kompleks.
3. Analisis Persamaan Gelombang dan *Unidirectional Linear Wave Motion :* Dalam analisis persamaan gelombang, kita dapat mengaplikasikan metode karakteristik untuk menyelesaikan masalah nilai awal dengan mengidentifikasi kurva karakteristik yang mempengaruhi solusi. Konsep *unidirectional linear wave motion* menjelaskan perambatan gelombang dengan arah yang tetap, dan penyelesaiannya dapat dilakukan dengan menggunakan metode karakteristik untuk mendapatkan solusi yang memenuhi kondisi awal yang diberikan.

Pemahaman terhadap persamaan panas dan kaitannya dengan subbab-subbab tersebut memberikan landasan yang kuat dalam pemodelan fenomena fisika seperti perambatan gelombang, perpindahan massa, dan perambatan panas dalam berbagai konteks. Dengan demikian, analisis yang mendalam terhadap persamaan konduksi panas satu dimensi dan hubungannya dengan subbab-subbab terkait mengungkapkan kompleksitas fenomena perambatan gelombang dan aplikasinya dalam pemodelan dan pemecahan masalah dalam berbagai bidang ilmu seperti fisika, matematika, dan rekayasa. Diharapkan pada penelitian selanjutnya membahas masalah persamaan diferensial parsial lainnya secara lebih mendalam dengan membuat analisis pada berbagai materi terkait.

Daftar Pustaka

Levine, h. (1978). *Unidirectional wave motions*. North-holland pub. Co.

Maulidi, i. (2018). *Metode beda hingga untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial*. Https://doi.org/10.31219/osf.io/q526f

Noor, a. A., putri, a. R., & syafwan, m. (2019). Solusi analitik dan numerik suatu persamaan gelombang satu dimensi. *Jurnal matematika unand*, *8*(4), 1. Https://doi.org/10.25077/jmu.8.4.1-8.2019

Xia, f., liu, j., nie, h., fu, y., wan, l., & kong, x. (2020). Random walks: a review of algorithms and applications. *Ieee transactions on emerging topics in computational intelligence*, *4*(2), 95–107. Https://doi.org/10.1109/tetci.2019.2952908